Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

11 класс

Заключительный тур
Вариант 1

2023-2024

1. (*12 баллов*) Параллелограмм *ABCD* является основанием пирамиды *SABCD*. Точки *M*, *N* и *P* лежат на рёбрах *SA*, *SD* и *SC* соответственно, причём *SM*:*MA*=1:2, *SN*:*ND*=1:3, *SP*:*PC*=1:4. В каком отношении плоскость *MNP* делит ребро *SB*? ✓

2. (*12 баллов*) Решите систему

$$\begin{cases}\dfrac{\log_3 x\cdot \overset{\frac{1}{2}\log_2 y}{\log_4 y}}{\log_2(xy)}=\dfrac{1}{3},\\ \dfrac{\log_3 y\cdot\log_{25}z}{\log_5(yz)}=\dfrac{3}{5},\\ \frac{1}{3}\log_3 z\quad \dfrac{\log_{27}z\cdot\log_2 x}{\underset{\frac{1}{4}\log_2(zx)}{\log_{16}(zx)}}=1.\end{cases}$$

✓ **3.** (*13 баллов*) Даны числа x, y, z такие, что $\underbrace{4^x}_{a}+\underbrace{\sin^4 y}_{в}+\underbrace{\ln^6 z}_{c}=16$. Докажите, что $2^{x+1}+3\sin^2 y-6\ln^3 z\le 28$.

4. (*13 баллов*) Дана последовательность:

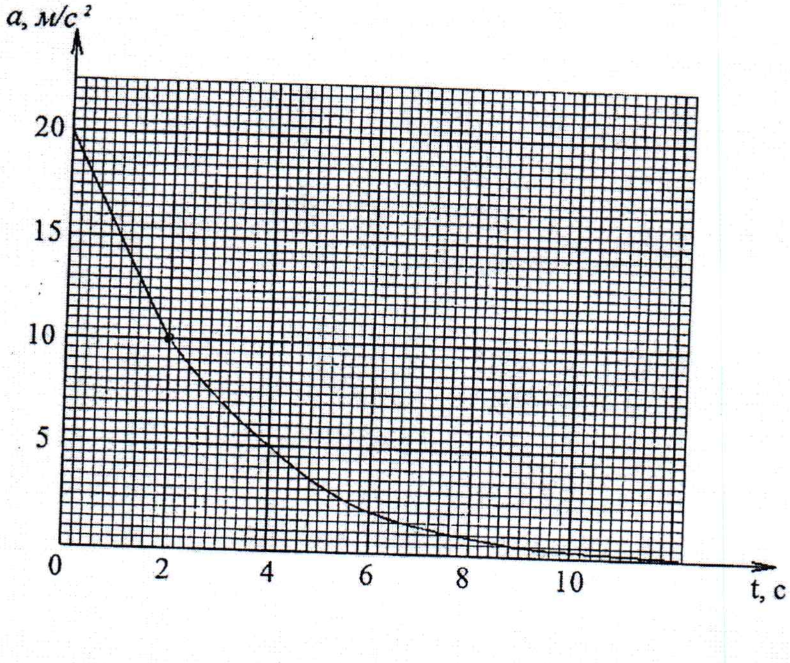
$$a_1=\cos 10°,\ a_2=\cos 100°,\dots,a_n=\cos(10^n)°,\ \dots.$$

Найдите наименьшее значение выражения

$$a_1\cdot\cos x+(a_2+a_{2023}+a_{2024})\cdot\sin x,\ \text{где } x\in R.$$

✓ **5.** (*15 баллов*) Тело бросают с высокорасположенного балкона вертикально вверх. Зависимость модуля ускорения тела от времени приведена на графике. Пользуясь данной зависимостью, оцените начальную скорость тела. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

$v=0.$

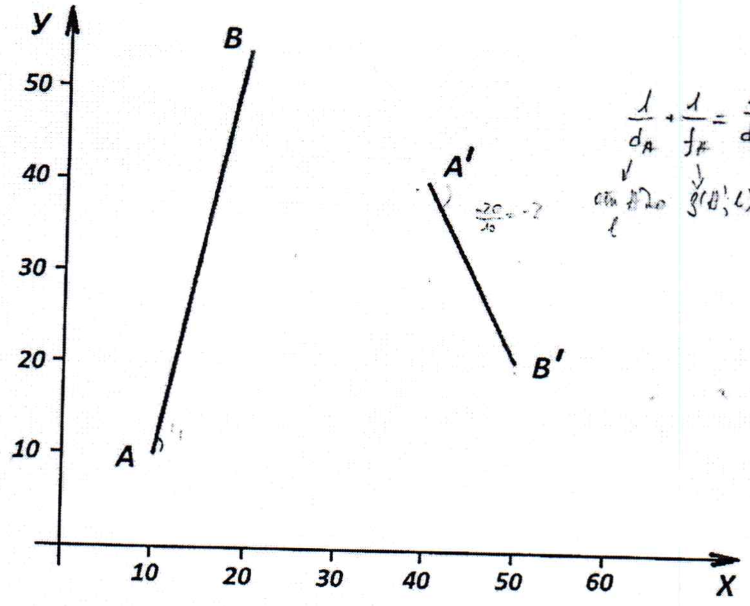


✓

6. (*10 баллов*) Два маленьких одноименно заряженных шарика удерживают на расстоянии L друг от друга. Заряды шариков q_1 и q_2, их массы m_1 и m_2 соответственно. В определённый момент времени шарики отпускают. Определите их скорости через достаточно продолжительный промежуток времени. Силой тяжести пренебречь.

7. (*10 баллов*) Одиннадцатиклассник Петя выполнял эксперимент с водяным паром. Он взял пар при температуре T=100 С, поместил его в вертикальный цилиндрический сосуд под невесомый поршень. Поршень Петя установил на высоте h_0=30 см от дна сосуда и отпустил. После установления равновесия поршень оказался на высоте h=10 см, при этом давление пара выросло в 2 раза. Определите массу пара, которую Петя взял для работы. Площадь дна сосуда S=100 см^2.

8. (*15 баллов*) На рисунке показано местоположение предмета AB и его изображения A^IB^I, полученного с помощью тонкой линзы. С помощью циркуля и линейки восстановите положение линзы, определите координаты её оптического центра и фокусов. Словами опишите последовательность действий, приводящую к ответу.



$$\frac{1}{d_A}+\frac{1}{f_A}=\frac{1}{d_B}+\frac{1}{f_B}$$

[illegible] l $\rho(B';l)$ $\rho(B;l)$ $\rho(B';l)$

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 77-11-111

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	—	10	13	15	10	2	0	62

Вариант 1

1.

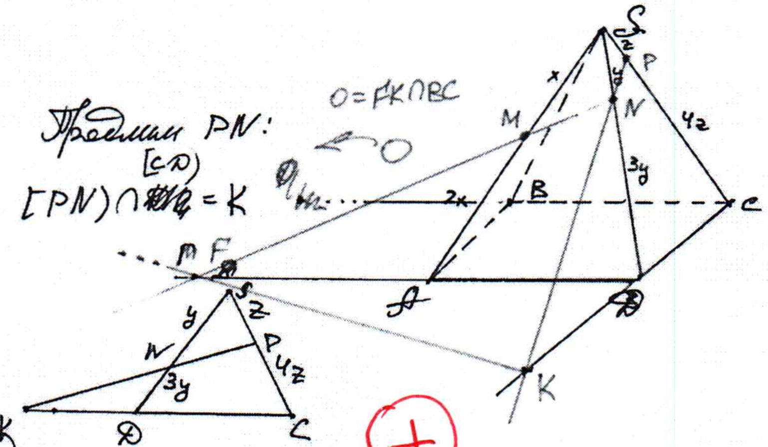
S-ABCD – пир-да,
ABCD – пар-мм.
$M \in SA: SM:MA=1:2$;
$N \in SD: SN:ND=1:3$;
$P \in SC: SP:PC=1:4$
$SB \cap MNP = Q$

$SQ:BQ$ – ?

пусть
$MS=x,\ MA=2x$;
$SN=y,\ ND=3y$;
$SP=z,\ PC=4z$

Продлим PN:
$[PN) \cap [CD) = K$

$O = FK \cap BC$



+

по Th. Менелая (для $\triangle DSC$ и KP-секущ.): $\frac{PC}{PS}\cdot\frac{SN}{ND}\cdot\frac{DK}{KC}=1 = \frac{4}{3}\cdot\frac{KD}{KC} \Rightarrow \frac{KD}{KC}=\frac{3}{4}$,

$KD=\frac{3}{4}KC=\frac{3}{4}KD+\frac{3}{4}DC \Rightarrow \frac{1}{4}KD=\frac{3}{4}DC$, $\boxed{KD=3DC}$

Аналогично, продлим NM: $[NM) \cap [DA) = F$.

по Th. Менелая для $\triangle ASD$ и FN-сек.:

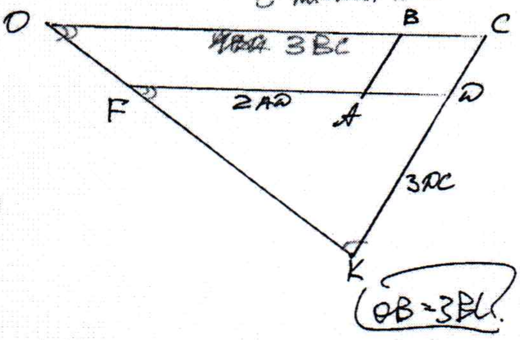
$\frac{3y}{y}\cdot\frac{x}{2x}\cdot\frac{AF}{FD}=1 = \frac{3}{2}\frac{AF}{FD} \Rightarrow \frac{AF}{FD}=\frac{2}{3}$, $AF=\frac{2}{3}FD$

$AF=\frac{2}{3}AF+\frac{2}{3}AD \Rightarrow \frac{1}{3}AF=\frac{2}{3}AD$, $\boxed{AF=2AD}$.

Проведём прямую FK: $FK \cap BC = O$.

Соединим OP. $OP \in$ ~~BCD~~ (BCS), т.к. $P \in SC$, $O \in BC \Rightarrow$
$OP \cap BS = Q$.

В пл-ти ABC:



(OB=3BC)

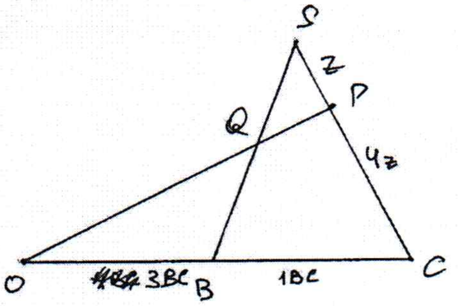
$F \in AD \parallel BC \Rightarrow FD \parallel OC$.
$(O \in BC \parallel AD)$

$\triangle KFD \sim \triangle KOC$, т.к. $\angle K$ – общ.,
$\angle DFK = \angle COK$ как соотв. при $OC \parallel FD$.

$\frac{FD}{OC}=\frac{KD}{KC}$, $\frac{3AD}{OC}=\frac{3DC}{4DC} \Rightarrow \boxed{OC=4AD.}$

ABCD – пар-мм $\Rightarrow BC=AD$, $\boxed{OC=4BC}$

мит.
отр ①



по Th. Менелая для △BSC и OP-сек:

~~$\frac{4z}{z} \cdot \frac{SQ}{QB} \cdot \frac{4BC}{5BC} = 1$~~

~~$\frac{SQ}{QB} \cdot \frac{16}{5} = 1 \Rightarrow \frac{SQ}{QB} = \frac{5}{16}$.~~

$\frac{\cancel{4z}}{\cancel{z}} \cdot \frac{SQ}{QB} \cdot \frac{3BC}{\cancel{4}BC} = 1$ $\quad$ $\frac{3 \cdot SQ}{QB} = 1 \Rightarrow \frac{SQ}{QB} = \frac{1}{3}$.

Ответ: SQ : QB = ~~[illegible]~~ 1:3

5.

$g = 10 м/с^2$

v_0 — ?

Поскольку $a_0 > g$, играет роль сопротивление воздуха, которое зависит от скорости:

$F_{сопр.} = 0$ при $v = 0 \Rightarrow$ при $v = 0$ $\quad a = g$

Заметим на графике: $a = g = 10 м/с^2$ при $t = 2с$.

Более того, до момента $t = 2с$, $a \sim t$ — лин. график.

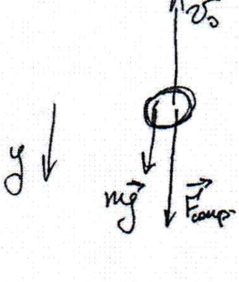
$$\dot{a} = \frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{-10}{2} м/с^3 = -5 м/с^3$$

на промежутке $t \in (0; 2с)$: $\begin{cases} a(t) = \dot{a} \cdot t + a_0 \\ v(t) = v_0 + a_0 \cdot t + \frac{\dot{a} \cdot t^2}{2} = \int\limits_0^t a(t)dt \end{cases}$

$v(t = 2с) = 0$:

$v_0 = -\frac{\dot{a} t^2}{2} - a_0 t = +\frac{5 м/с^3 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} с^2}{\cancel{2}} - 20 м/с^2 \cdot 2с. = 10 м/с - 40 м/с$

$v_0 = -30 м/с$:



за направление оси y взято направление $\vec{g}$.

$v_0 < 0 \Leftrightarrow \vec{v_0} \uparrow\downarrow \vec{g}$ (~~[illegible]~~ движение линейное (верт)).

Ответ: 30 м/с

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 77-11-111

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

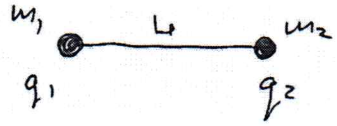
Вариант 1

№6.

$(q_1 \cdot q_2 > 0)$

L, q_1, q_2, m_1, m_2

$v_{1,2}' - ?$



$$ЗСЭ: W_0 = E_{к_1} + E_{к_2} + \underset{\to 0 \text{ на бесконеч-ти}}{W_\infty}$$

$$\frac{k q_1 q_2}{L} = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

На систему не действуют внешние силы, движение происходит под действием внутр. сил => работает ЗСИ:

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 v_2 \quad , \quad m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0$$

$$(\vec{v_1} \uparrow\downarrow \vec{v_2})$$

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1} \cdot v_2 \; ; \; v_2 = \frac{m_1}{m_2} \cdot v_1$$

$$\frac{k q_1 q_2}{L} = \frac{\cancel{m_1} \cdot m_2^2 \cdot v_2^2}{m_1^{\cancel{2}} \cdot 2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = v_2^2 \left(\frac{m_2}{2} + \frac{m_2^2}{m_1 \cdot 2} \right)$$

m_1

Ответ:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 m_1 \cdot k q_1 q_2}{L (m_2^2 + m_2 \cdot m_1)}}$$, исходя из симметрии:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 m_2 \cdot k q_1 q_2}{L (m_1^2 + m_1 \cdot m_2)}}$$

лист ②

№4

$a_n = \cos(10^n)^\circ$.

$f(x) = a_1 \cdot \cos x + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \cdot \sin x$

$x \in \mathbb{R}$

$\min(f(x)) - ?$

Введём в $f(x)$ ~~вспомогат~~ доп. аргумента:

$$f(x) = \sqrt{a_1^2 + (a_2 + a_{2023} + a_{2024})^2} \cdot \left(\frac{a_1}{\sqrt{\ldots}} \cdot \cos x + \sin x \, \frac{(a_2 + a_{2023} + a_{20}}{\sqrt{\ldots}} \right.$$

~~[illegible]~~ пусть $\varkappa$: $\sin \varkappa = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + (a_2 + a_{2023} + a_{2024})^2}}$:

$$f(x) = \underbrace{\sqrt{a_1^2 + (a_2 + a_{2023} + a_{2024})^2}}_{\text{const.}} \cdot \underbrace{\sin(x + \varkappa)}_{\in [-1; 1]} \Rightarrow$$

$$\min(f(x)) = -1 \cdot \sqrt{a_1^2 + (\underbrace{a_2 + a_{2023} + a_{2024}}_{(1)})^2}$$

~~$\cos\frac{10^2}{180}\pi$~~

рассмотрим выражение (I):

$$\cos \frac{\cancel{100}^{5}}{\cancel{180}_{9}} \pi + \cos \frac{10^{2023}}{180} \pi + \cos \frac{10^{2024}}{180} \pi = \cos \frac{5}{9} \pi + \cos\left(\frac{2^{2021} \cdot 5^{2022}}{9} \pi \right) + \cos\left(\frac{2^{2022} \cdot 5^{2023}}{9} \pi \right)$$

~~cos~~ $\frac{2^{2021} \cdot 5^{2022}}{9} \pi = \frac{10^{2021} \cdot 5}{9} \pi$

$10 \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow 10^{2021} \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow 10^{2021} \cdot 5 \equiv 5 \bmod 9. \Rightarrow$

$\frac{10^{2021} \cdot 5}{9} \pi = N\pi + \frac{5}{9} \pi$, $N = \frac{5(10^{2021} - 1)}{9} \in \mathbb{N}$

Заметим, N – нечётное: $5 \not\vdots\, 2$, $(\underset{\vdots 2}{10}^{2021} - \underset{\not\vdots 2}{1}) \not\vdots\, 2$. $\Rightarrow$

$\cos\left(\frac{2^{2021} \cdot 5^{2022}}{9} \pi \right) = \boxed{\cos\left(\pi + \frac{5}{9} \pi \right)} = -\cos \frac{5}{9} \pi$

Аналогично, $\frac{10^{2022} \cdot 5}{9} \pi = N_2 \cdot \pi + \frac{5}{9} \pi$, $N_2 = \frac{5 \cdot 10^{2022} - 5}{9} \not\vdots\, 2$

~~cos~~ $\cos\left(\frac{2^{2022} \cdot 5^{2023}}{9} \pi \right) = \cos\left(\pi + \frac{5}{9} \pi \right) = -\cos \frac{5}{9} \pi$

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 77-11-111

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1.

$$\min(f(x)) = -1\sqrt{\cos^2\frac{1}{18}\pi + \left(\cancel{\cos\frac{5}{9}\pi} - \cancel{\cos\frac{5}{9}\pi} - \cos\frac{5}{9}\pi\right)^2} \;\ominus$$

$$a_2 = \cos\frac{\cancel{100}^{5}}{\cancel{180}_{9}}\pi = \cos\frac{5}{9}\pi$$

$$\ominus\; -1\cdot\sqrt{\cos^2\frac{1}{18}\pi + \cos^2\frac{5}{9}\pi}$$

(+)

$$\cos\frac{5}{9}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{18}\pi\right) = -\sin\frac{1}{18} \Rightarrow$$

$$\min(f(x)) = -1\cdot\sqrt{\cos^2\frac{1}{18}\pi + \sin^2\frac{1}{18}\pi} = ~~[illegible]~~ -1$$

Ответ: ~~[illegible]~~. -1

№3

$x, y, z: 4^x + \sin^4 y + \ln^6 z = 16$

Док-ть: $2^{x+1} + 3\sin^2 y - 6\ln^3 z \le 28$ | ~~$\Rightarrow$~~ ~~необходимо док-ть:~~

~~пусть $a = 4^x$, $b = \sin^4 y$, $c = \ln^6 z$:~~

~~$2\sqrt{a} + 3\sqrt{b} - 6\sqrt{c} \le 28$ при усл.: $a + b + c = 16$, $a \in (0; +\infty)$; $b \in [0; 1]$; $c \in [0; +\infty)$.~~

~~$\frac{\sqrt{a}}{3} + \frac{\sqrt{b}}{2} - \sqrt{c} \le \frac{14}{3}$ (1)~~

~~$\begin{cases} \sqrt{a} > 0 \\ \sqrt{b} \ge 0 \\ \end{cases} \Rightarrow$ выраж. (1) принимает~~

Пусть $a = 2^x$, $b = \sin^2 y$, $c = \cos^3 z$:

(a, b, c – независимые переменные!)

$a^2+b^2+c^2=16$

$2a+3b-6c \le 28$ – необходимо док-ть.

~~$a\in(0;+\infty)$~~ ~~[illegible]~~

$$\begin{cases} a>0 \quad \text{– ОДЗ} \\ 0\le b\le 1 \\ c\in(-\infty;+\infty) \end{cases}$$

$a^2+b^2+c^2=16$ – сфера, в коорд-ах a, b, c: $O(0;0;0)$, $R=4$;

$\underbrace{2a+3b-6c-28}_{\text{ур-ие пл-ти } \alpha} \le 0$ – ~~пространство под пл-тью~~ пространство с одной стороны пл-ти α

Необходимо док-ть, что для всех точек сферы (с учётом ограничений на a, b, c – часть сферы) выполняется нерав-во:

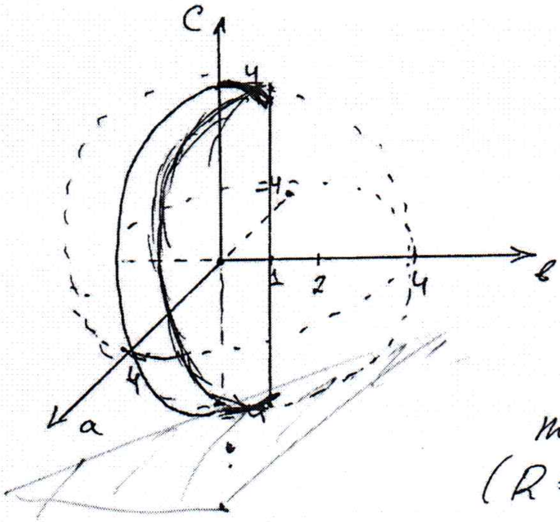
(равенство достигается в точке касания)

~~$a \le$ [illegible] $3c$ 3~~

O: $0+0-0-28 \le 0$ – верно!

$\rho(O;\alpha) = \frac{28}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{28}{7} = 4$.

– расстояние от $O(0;0)$ – центра „сферы" до пл-ти α: $2a+3b-6c-28=0$.



Это значит, что плоскость α касается сферы. ($R=\rho(O;\alpha)$).

~~точка касания [illegible] $T(a_1,b_1,c_1)$:~~ ~~$\begin{cases} a_1^2+b_1^2+c_1^2=16 \\ 2a_1+3b_1-6c_1-28=0 \end{cases}$~~

! Вся сфера лежит по одну сторону от α, ($\Omega\cap\alpha = T$) Почему?

т. O удовлетворяет нерав-ву ⇒ все точки ~~[illegible]~~ сферы удовлетворяют нерав-ву. ЧТД.

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 77-11-111

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1.

№2.

~~$$\begin{cases} \dfrac{\log_3 x\cdot\log_4 y}{\log_2(xy)} = \dfrac{1}{3} \Big|^{-1} \\ \dfrac{\log_2 y\cdot\log_{25} z}{\log_5(yz)} = \dfrac{3}{5} \Big|^{1-1} \\ \dfrac{\log_{27} z\cdot\log_2 x}{\log_{16}(zx)} = 1 \Big|^{1-1} \end{cases}$$~~

$x, y, z - 7$

~~ОДЗ: $\log_2(xy) = 0 \Rightarrow xy \neq 1$~~

~~xy~~

$x \neq \frac{1}{y}, y \neq \frac{1}{x}$

~~ОДЗ:~~

~~$$\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xy \neq 1 \\ yz \neq 1 \\ zx \neq 1 \end{cases}$$~~

~~$x, y, z \neq 1.$~~

~~$$\frac{2(\log_2 x + \log_2 y)}{\log_3 x\cdot\log_2 y} = 3$$~~

~~$$\frac{2\log_2 x}{\log_3 x\cdot\log_2 y} + \frac{2\log_2 y}{\log_2 y\cdot\log_2 x} = 3 \Big|\cdot\log_3 x$$~~

~~$$\frac{2\log_2 x\cdot\log_3 x}{\log_2 y} = 3\log_3 x - 2$$~~

$= \log_y x$

~~$$2\log_y x\cdot\log_3 x = 3\log_3 x - 2$$~~

~~$$3^{2\cdot\log_y x\cdot\log_3 x} = 3^{3\cdot\log_3 x - 2}$$~~

~~$3^{2\log_y x}$~~ $x^{2\log_y x} = \frac{x^3}{9}$

~~$3^{2\log}$~~

лист 4.

№7.

$t_0 = 100\,^\circ C = T_0 = 373\,^\circ C$

$h_0 = 0{,}3$ м

$h_1 = 0{,}1$ м

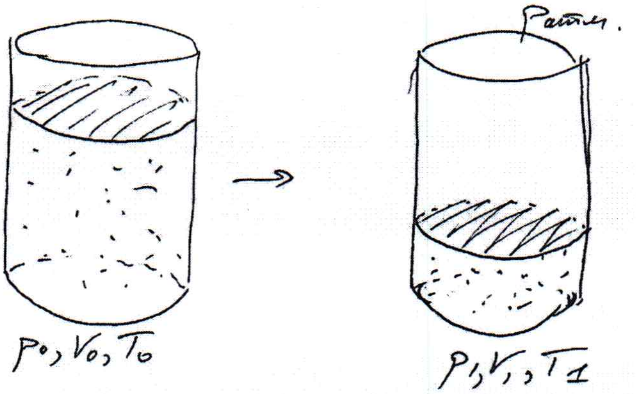
$p_1 = 2p_0$

$S = 100$ см^2

$m_{пара}$ – ?

H_2O – трёхат. молекула.

$U = \frac{7}{2}\Delta(pV)$



$P_1 = P_{атм} = 10^5$ Па – равновесие поршня.

$\Downarrow$

$p_0 = 5\cdot 10^4$ Па.

$V_1 = \frac{1}{3}V_0 = \frac{h_1}{h_0}\cdot V_0$

сначала: $p_0V_0 = \nu_0RT_0$

после: $p_1V_1 = \frac{2}{3}p_0V_0 = \nu_1RT_1$

$\Delta(pV) = -\frac{1}{3}p_0V_0$

$Q = 0$, $\Delta U = A_{атм} = P_{атм}\cdot S\cdot(h_0 - h_1) =$ ~~$\Delta(pV)$~~

$\Delta U =$ ~~$\frac{7}{2}\nu R\Delta T$~~ ~~$\Delta T\cdot R(\frac{7}{2}\nu$~~