

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 61/2 - 11-54

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	—	9	8	4	15	10	10	4	60

Вариант 1

3.
Дано: $4^x + \sin^4 y + \ln^6 z = 16$

Доказать: $2^{x+1} + 3\sin^2 y - 6\ln^3 z \leq 28$.

Пусть $2^{x+1} = a$; $\sin^2 y = b$; $\ln^3 z = c$.

KBLL? $2(a-0) + 3(b-0) - 6(c-0) \leq \sqrt{2^2+3^2+6^2} \cdot \sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2+(c-0)^2}$

$\sqrt{2^2+3^2+6^2} \cdot \sqrt{36+9+4} = 7\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 7\sqrt{96} = 28 \Rightarrow$

$2^{x+1} + 3\sin^2 y - 6\ln^3 z \leq 28$

4.
 $[\cos(\omega^n)]' = \cos(\omega^n)' = \cos 80^\circ$, где $n \geq 2$, n — целое

$\Rightarrow a_1 \cdot \cos x + (a_2 + a_2 \omega^2 + a_2 \omega^4) \cdot \sin x = \cos 80^\circ \cdot \cos x + \cos 80^\circ \cdot \sin x$

Пусть $F(x) = \cos 80^\circ \cdot \sin x + \cos 10^\circ \cdot \cos x$, тогда

$F(x)' = \cos 80^\circ \cdot \cos x - \cos 10^\circ \cdot \sin x$

$\cos 80^\circ \cdot \cos x - \cos 10^\circ \cdot \sin x = 0$ | : $\cos x \neq 0$

$\text{tg } x = \frac{\cos 80^\circ}{\cos 10^\circ}$ — точка максимума $\Rightarrow x = \arctg \frac{\cos 80^\circ}{\cos 10^\circ} = 60^\circ$

$\Rightarrow$ максимальное значение $F(x) = \cos 80^\circ \cdot \sin 60^\circ + \cos 10^\circ \cdot \cos 60^\circ = 1$

Т.к. функция непрерывна, минимальное значение $F(x) = -1$

Ответ: -1.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 61/2-11-54

Вариант 1.

№ 6

Дано:
 $m_1, q_1;$
 L, m_2, q_2
 v_1, v_2

1) $m_1 q_1 \leftarrow \rightleftharpoons \rightarrow m_2 q_2$

ЗСЭ: $W_1 = W_2$

$W_1 = \frac{k q_1 q_2}{L} \quad W_2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$

2) $v_1 m_1 \leftarrow \rightleftharpoons \rightarrow v_2 m_2$

ЗСУ: $m_1 v_1 = m_2 v_2$

$2 \frac{k q_1 q_2}{L} = m_1 v_1^2 + \frac{m_1^2}{m_2} v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2 k q_1 q_2}{L (m_1 + \frac{m_1^2}{m_2})}}$

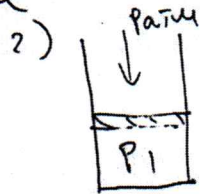
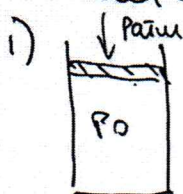
$v_2 = v_1 \cdot \frac{m_1}{m_2} = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{2 k q_1 q_2}{L (m_1 + \frac{m_1^2}{m_2})}}$

Ответ: $\sqrt{\frac{2 k q_1 q_2}{L (m_1 + \frac{m_1^2}{m_2})}}; \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{2 k q_1 q_2}{L (m_1 + \frac{m_1^2}{m_2})}}$

№ 7

Дано:
 $S = 100 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$
 $T_0 = 373 \text{ К}$
 $h_0 = 0,3 \text{ м}$
 $h_1 = 0,1 \text{ м}$
 $p_1 = 2 p_0$
 $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$
 m_n

Решение



$p_1 = p_{\text{атм}}$
 $p_0 = \frac{p_1}{2} = \frac{p_{\text{атм}}}{2}$

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона
 $p_1 V_1 = \nu R T_1; p_1 h_1 S = \nu R T_1; p_0 h_0 S = \nu R T_0$

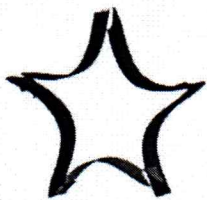
$p_0 = \frac{\nu R T_0}{h_0 S} \quad p_1 = \frac{\nu R T_1}{h_1 S} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\nu R T_1}{h_1 S} = 2 \frac{\nu R T_0}{h_0 S} \Rightarrow \frac{T_1}{h_1} = \frac{2 T_0}{h_0} \Rightarrow$

$T_1 = \frac{h_1}{2 h_0} T_0$

$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1; m = \frac{\mu p_1 V_1}{R T_1} = \frac{S p_{\text{атм}} \cdot \mu \cdot h_0}{2 R T_0} =$
 $= \frac{100 \cdot 10^{-4} \cdot 10^5 \cdot 18 \cdot 10^{-3} \cdot 0,3}{2 \cdot 8,31 \cdot 373} \approx 0,87 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$

Ответ: $0,87 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 61/2-11-57

Вариант 1

№5

Дано:
 $g = 10 \text{ м/с}^2$
 $v_{K-} = ?$

На тело действуют силы соотношение: $\vec{F}_c = -k\vec{v}$.

$$v_x = v_H + \int_{t_1}^{t_2} a_x dt.$$



$$v_{Kx} = 0 \text{ м/с} \quad t_1 = 0 \quad t_2 = 2 \text{ с (из графика)}$$

2 ЗН: Ох: $ma = mg + F_c$, отметим $a = g$, когда $v = 0$

$$v_{Kx} = 0; \quad v_{Kx} = -v_H; \quad a_x = a$$

$$0 = -v_H + \int_{t_1}^{t_2} a dt. \quad v_H = \int_{t_1}^{t_2} a dt; \quad \int_{t_1}^{t_2} a dt = \int_m; \quad \int_m = \frac{a_2 + a_1}{2} \cdot t_2.$$

$$a_1 = 10 \text{ м/с}^2; \quad a_2 = 10 \text{ м/с}^2; \quad v_H = \frac{a_2 + a_1}{2} \cdot t_2 = \frac{10 + 10}{2} \cdot 2 = 20 \text{ м/с}.$$

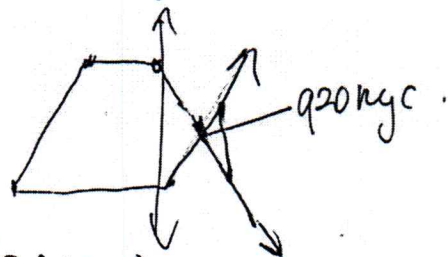
Ответ: 20 м/с

№8. I) Соединим В-В' и А-А' - они пересекаются в оптическом центре линзы (во всех случаях используем з.с.в.а. луча)

II) Продолжения прямых АА' и ВВ' пересекаются на линзе координаты опт. центра: (36; 36)

III) Опустим перпендикуляр на линзу из точек и соединим их парей:

точка пересечения - фокус
координаты фокусов:
(39; 39) и (31; 34)



Ответ: оптический центр (36; 36)
фокусы: (39; 39) и (31; 34)



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 61/2-11-57

Вариант 1.

№ 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\log_3 x \cdot \log_2 y}{2 \log_2(xy)} = \frac{1}{3} \\ \frac{\log_3 y \cdot \log_5 z}{2 \log_5(yz)} = \frac{3}{5} \\ \frac{4 \log_3 z \log_2 x}{5 \log_2 zx} = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\log_2 xy}{\log_2 x \log_2 y} = \frac{3}{2} \\ \frac{\log_5 zy}{\log_3 y \log_5 z} = \frac{5}{6} \\ \frac{\log_2 zx}{\log_3 z \log_2 x} = \frac{4}{3} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\log_4 xy}{\log_3 x} = \frac{3}{2} \\ \frac{\log_7 zy}{\log_3 y} = \frac{5}{6} \\ \frac{\log_4 xz}{\log_3 z} = \frac{4}{3} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\log_2 y + 1}{\log_3 y} = \frac{5}{6} \\ \frac{\log_3 z + 1}{\log_3 z} = \frac{4}{3} \\ \frac{\log_3 x + 1}{\log_3 x} = \frac{3}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\log_3 y}{\log_3 z \log_3 y} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{5}{6} \\ \frac{\log_3 z}{\log_3 x \log_3 z} + \frac{1}{\log_3 z} = \frac{4}{3} \\ \frac{\log_3 x}{\log_3 y \log_3 x} + \frac{1}{\log_3 x} = \frac{3}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\log_3 y} + \frac{1}{\log_3 x} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{\log_3 z} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 z} = \frac{4}{3} \end{array} \right.$$

① выразим $\frac{1}{\log_3 y}$, тогда

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{\log_3 x} = \frac{5}{6} - \frac{1}{\log_3 z} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\log_3 x} - \frac{1}{\log_3 z} = \frac{4}{6} \\ \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 z} = \frac{4}{3} \end{array} \right. \Rightarrow \text{как получилось? } \log_3 z = 3; z = 27.$$

② $\frac{1}{\log_3 z} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{5}{6}$. $\frac{1}{\log_3 y} = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} \Rightarrow \log_3 y = 2 \Rightarrow y = 9$.

~~$\frac{1}{\log_3 z} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{5}{6}$~~ ③ $\frac{1}{2} + \frac{1}{\log_3 x} = \frac{3}{2} \Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3$.

Ответ: $x=3$; $y=9$; $z=27$.