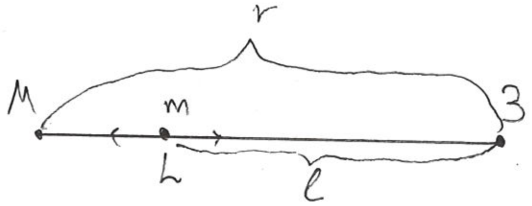
Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

*Шифр** А-78-11-01

Задание	1	2	3	4	5	6	Всего
Баллы							

Вариант ______

№1



Поместим воображаемый корабль массой m в точку Лагранжа L. Равнодействующая на него сил $=0$, т.е. $F_м = F_з$

Тогда $\cancel{G}\frac{\cancel{m}M_м}{(r-l)^2} = \cancel{G}\frac{\cancel{m}M_з}{l^2}$,

$$M_м \cdot l^2 = (r-l)^2 M_з$$

$$(M_з - M_м)l^2 - 2rM_з \cdot l + M_з \cdot r^2 = 0$$

Для простоты будем измерять расстояние в млн. км а массу в 10^{23} кг. Т.е. $M_з = 60\cdot 10^{23}$ кг, $M_м = 6,4\cdot 10^{23}$ кг.

$$53,6\, l^2 - 6552\, l + 178869,6 = 0$$

$$\sqrt{D} \sim 2139,874239$$

$$l = \frac{6552 \pm \sqrt{D}}{2\cdot 53,6} \qquad \left[\begin{array}{l} l \sim 81 \text{ млн. км} > r \\ l = 41,15788956 \text{ млн. км.} \end{array}\right.$$

Точка Лагранжа находится в 41,15789 млн. км. от Земли.

№2 Для простоты будем считать Марс материальной точкой массы M.

Разместим на расстоянии R от него тело массой m. Тогда сила тяжести для тела $F_т = G\frac{M\cancel{m}}{R^2} = \cancel{m}a \Rightarrow a = G\frac{M}{R^2} \sim$

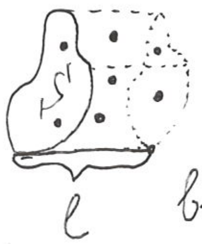
$\sim 3,628420131$ м/с².

Также возможен другой подход решения — предполагая под Марсом шар (однородный) с линейной плотностью ρ проинтегрировать ускорение по радиусу $(dr)\Big|_0^R$:

$$da = \frac{GM\frac{dr^3}{R^3}}{(R-r)^2} \Rightarrow a = \int_0^R \frac{GMr^2}{R^3(R-r)^2}\cdot dr$$

Поскольку при изменении вложенного r ускорение определяется соотношением $\frac{r^2}{(R-r)^2}$ (отношение квадратов расстояний до центра и до поверхности планеты соответственно) такой результат не будет существенно отличаться от рассмотренного ранее (проще говоря, чем ближе к поверхности тем больше масса тела, но тем меньше расстояние, т.е. ни изменения взаимогасятся).

№3

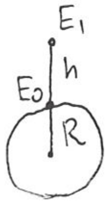


Скорость корабля не изменяется, т.е. энергия затрачиваемая на разгон астероидов при столкновении с ними полностью компенсируется силой тяги. Допустим, корабль пролетел расстояние l. За это время он встретил $N = \frac{S'\cdot l}{V_0}$ астероидов, каждому из которых сообщил скорость $U = 10$ км/с (столкновение неупругие). Пусть сила тяги корабля F. Тогда:

$$A_F = F\cdot l = \frac{m_0U^2}{2}\cdot N = \frac{m_0U^2}{2}\frac{S'l}{V_0} \Rightarrow$$

$$F = \frac{S'm_0U^2}{2V_0} = 49\text{ кН}.$$

№4



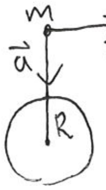
Работа по поднятию спутника на орбиту соответствует изменению его потенциальной энергии относительно силы притяжения Марса. Также заметим, что из условия $R = h$.

$E_0 = ma_0R = m\frac{GM}{R^2}R = \frac{mGM}{R}$. Аналогично $E_1 = m\frac{GM}{(2R)^2}2R = \frac{mGM}{2R}$. Тогда $\underset{\underset{A_1}{\shortparallel}}{A_n} = \Delta E = \frac{mGM}{2R}$, m – масса спутника, M – масса Марса.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр A-78-11-01

Для запуска спутника по орбите требуется сообщить ему скорость v достаточную для кругового движения. Т.е.:

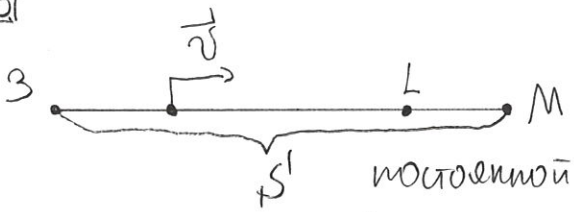


$$a = \frac{v^2}{(R+h)} = \frac{v^2}{2R} = G\frac{M}{(2R)^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{2R}$$

Тогда необходимая кинетическая энергия $E_k = A_2 =$
$= \frac{mv^2}{2} = \frac{mGM}{4R}$. Тогда их соотношение

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{mGM}{2R} \cdot \frac{4R}{mGM} = 2.$$

$\boxed{№5}$



Считая скорость движения ракеты постоянной (предполагая, что мощность тяги может изменяться и подстраиваться под равнодействующую сил тяжести со стороны обоих планет. В противном случае возможно получение зависимостей $a(S')$, $v(a)$ и $S'(t)$, т.е. системы дифференциальных уравнений и их решение численными методами, прим. методом Эйлера с помощью программы Python), можно найти время пути ракеты по прямой как $t = \frac{S'}{v} \approx 52,66203704$ суток (порядка $4,55 \cdot 10^6$ с.)

Также исходя из условия задачи здесь не учитывается движение планет за указанный промежуток времени и, соответственно, изменение траектории ракеты с прямой на более сложный полином n-й степени.