шифр 58-09-10

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	0	12	13	5	2	3	15	6	56

Вариант 2

1.

$$\begin{cases} x^2+2=(y+z)^2 \quad (1) \\ y^2+1=(x+z)^2 \quad (2) \\ z^2+1=(x+y)^2 \quad (3) \end{cases}$$

вычтем из (2) (3)

$y^2+\cancel{1}-z^2-1=\cancel{x^2}+2xz+z^2-\cancel{x^2}-2xy-y^2$

$y^2-z^2=2xz+z^2-2xy-y^2$

$2y^2-2z^2=2xz-2xy \;|:2$

$y^2-z^2=xz-xy$

$(y-z)(y+z)=-x(y-z)$

$(y-z)(y+z+x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ $\quad y=z$, $\quad x+2y=0 \Rightarrow x=-2y$

подставим полученные значение в уравнение 1.

$4y^2+2=(2y)^2$

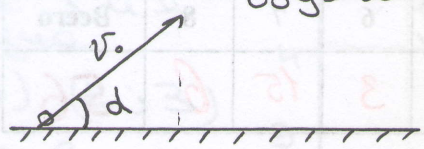
$4y^2+2=4y^2 \Rightarrow y=0, z=0, x=0$

Ответ: $y=0; z=0; x=0$.

5.

$v_0x = v_0 \cdot \cos\alpha$

$v_0y = v_0 \cdot \sin\alpha$



1 посчитаем куда улетел бы шарик если не ударился об стенку.

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \frac{at^2}{2} \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{at^2}{2} \end{cases}$$

$$t = \frac{v_0\sin\alpha \pm \sqrt{v_0\sin\alpha^2 - 2g}}{g}$$

$$\begin{cases} S = 0 + v_0 \cdot \cos\alpha t + 0 \\ 0 = 0 + v_0 \cdot \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

$$S = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot \frac{v_0\sin\alpha + \sqrt{v_0\sin\alpha^2 - 2g}}{g}$$

$$\frac{gt^2}{2} - v_0 \cdot \sin\alpha t = 0$$

v_0x - не меняется ⇑ меняется только v_0y.

$$D = (v_0\sin\alpha)^2 - 2g =$$

$$= \left(\frac{30 \cdot \sqrt{3}}{2}\right)^2 - 20 = \left(\frac{900 \cdot 3}{4}\right) - 20 =$$

$$= 655$$

в верхней точке полета

$$v = v_0 \cdot \cos\alpha \cancel{(v_{0x})} =$$

$$= 30 \cdot \frac{1}{2} = 15 \text{ м/с}$$

$$v = 20 \text{ м/с}$$ - время до высшей точки

найдем высоту на которую поднимется за это время тело.

4.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f(g(x))$, где $g(x)=x^2+4x+2024$

предположим, что корни $f(x)$ являются, какие-то x_1, x_2 и x_3

$\Downarrow$

$x^2+4x+2024=x_1$

$x^2+4x+(2024-x_1)=0$

$D=16-(2024-x_1)\cdot 4$

$D\geq 0$, для того, что бы были корни

$16-(2024-x_1)\cdot 4\geq 0$

$16\geq(2024-x_1)\cdot 4 \mid :4$

$4\geq 2024-x_1$

$x_1\leq -2020$ - в этом случае есть корни,

при $x_1>-2020$ - корней действительных нет.

аналогично для x_2 и x_3

7.

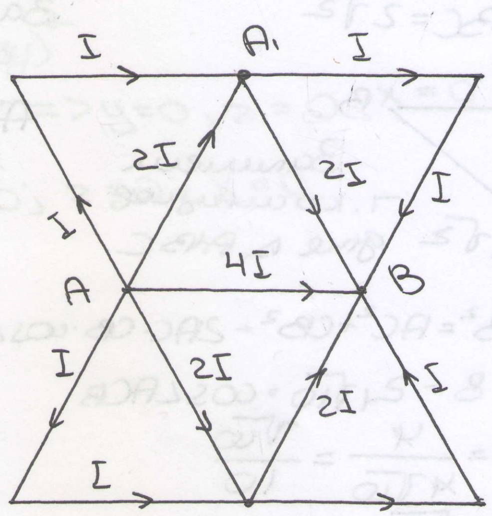


схема симметрична относительно AB расставим ток

$U_{AB}=4IR$

$I_{AB}=10I$

$R=\frac{U_{AB}}{I_{AB}}=\frac{4}{10}R=0{,}4R$

$=3{,}2\,\Omega$

Ответ: $R=3{,}2\,\Omega$

8.

Зададим уравнение прямой для I и II

I: пусть $(1;5)$, $(2;3)$

$$\begin{cases} 5 = k + b \\ 3 = 2k + b \end{cases}$$

$k = -2$

$b = 7$

$y = -2x + 7$

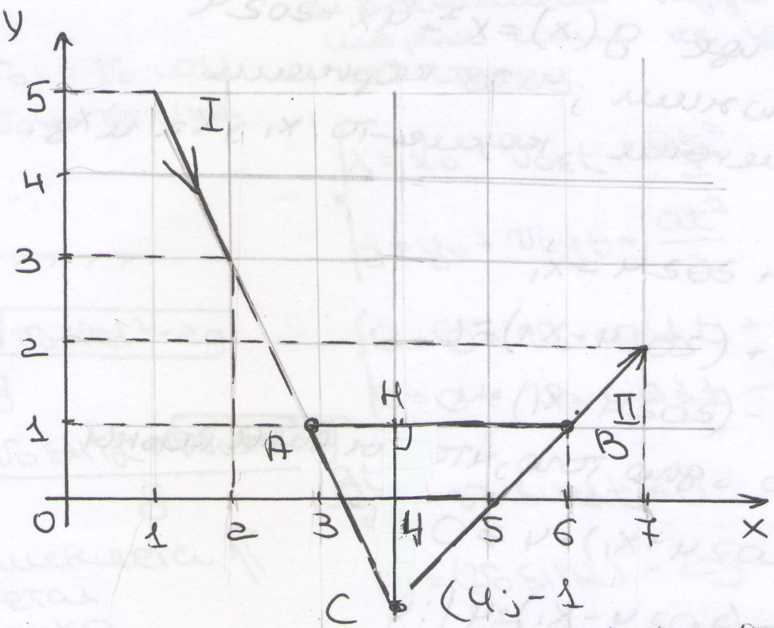
II: $(6;1)$, $(7;2)$

$$\begin{cases} 1 = 6k + b \\ 2 = 7k + b \end{cases}$$

$k = 1$

$b = -5$

$y = x - 5$



пересечение этих прямых

Найдем точку приравняв у

$x - 5 = -2x + 7$

$3x = 12$

$x = 4$

$y = -1$

координата точки отражения

$(4;-1)$

на графике я обозначила $\triangle ABC$ у которого $AB = 3$

найдем по т. Пифагора AC и AB, проведем AH (высоту)

$CH = 2$; $AH = 1$; $HB = 2$

Запишем т. Пифагора для $\triangle AHC$

$AH^2 + HC^2 = AC^2$

$1 + 4 = AC^2$

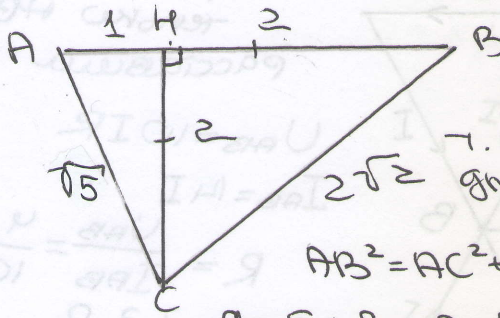
$AC = \sqrt{5}$

Т. Пифагора для $\triangle HBC$

$BC^2 = HB^2 + HC^2$

$BC^2 = 4 + 4$

$BC = 2\sqrt{2}$



Запишем т. косинусов для $\triangle ABC$

$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos\angle ACB$

$9 = 5 + 8 - 24\sqrt{10} \cdot \cos\angle ACB$

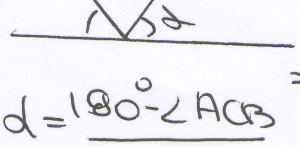
$\cos\angle ACB = \frac{4}{4\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$\angle ACB = \arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$

⇓

$\alpha = \frac{180° - \arccos\frac{\sqrt{10}}{10}}{2}$

при отражение пучка угол падения и отражение равны



⇓

угол α это $\frac{90° - \angle ACB}{2}$

$\alpha = \frac{180° - \angle ACB}{2}$

это наклон зеркала относительно AC, а нам нужен относительно HC $\alpha' = \angle ACH + \alpha$ из $\triangle AHC \Rightarrow \cos\angle ACH = \frac{2}{\sqrt{5}}$

⇓

Ответ $\alpha' = \frac{180° - \arccos\frac{\sqrt{10}}{10}}{2} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\angle ACH = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$

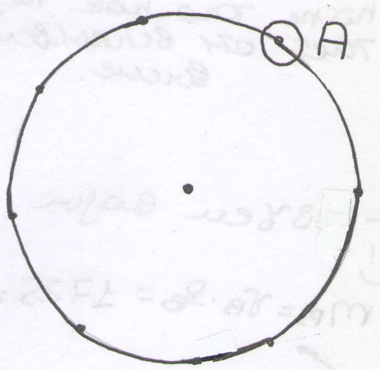
Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 58-09-10

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

3.



1. без точки A.

есть 2024 точки и мы выбираем из них 2024, 2023 3

каждый из вариантов это

C_{2024}^{2024} для 2024 точек (вершин)

C_{2024}^{2023} для 2023 точек (вершин)

⋮

C_{2024}^{3} для 3 вершин

+ все это складываем

т.к все точки расположены на окружности => всегда выпуклый четырехугольник

(3 min число т.к как треугольники это многоугольники с min кол-во вершин)

2. С точкой A все почти аналогично, только ход идёт до 2, а не до 3 т.к с учетом A и ещё 2 точек можно сделать △.

вид:
2024, 2023 . . . . 3, 2.

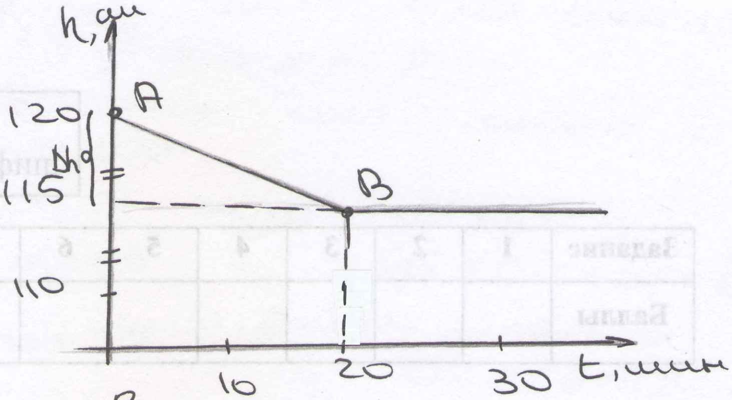
+ C_{2024}^{2024}, C_{2024}^{2023}, ⋮, C_{2024}^{3}, C_{2024}^{2}

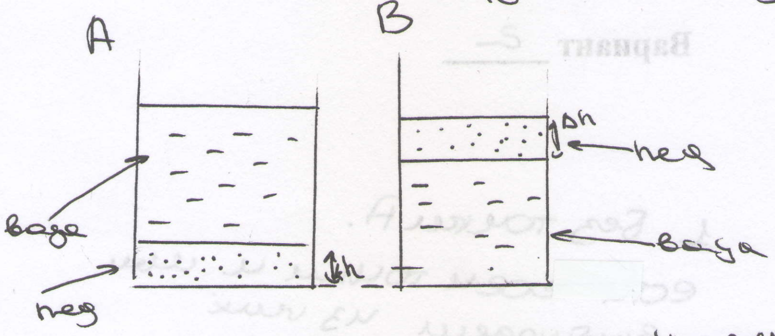
вот на столько будет больше

$$C_{2024}^{2} = \frac{2024!}{2!\cdot(2024-2)!} = \frac{\overset{1012}{\cancel{2024}}\cdot 2023 \cdot \cancel{2022!}}{2\cdot \cancel{2022!}} = 1012\cdot 2023 = 2047276$$

Ответ: вариантов с точкой A на 2.047.276 больше чем без нее.

6.





т.к плотность льда меньше плотности воды
⇓
после того как лед тает он всплывает выше.

конечное $h_0 = 115$ – это уровень только воды

$V = h \cdot S$

$m = \rho \cdot V$

⇓

$V_в = h_0 S = 1725 см^3$ – объем воды

⇓

$m_в = V_в \cdot \rho_в = 1725 г$ масса воды

а, Δh это уровень льда

$V_л = \Delta h \cdot S = 75 см^3$

⇓ $m_л = 67{,}5 г$ масса льда

Ответ: $m_л = 67{,}5 г$; $m_в = 1725 г$

2.

1. 2.

$0{,}75a$ a

$1{,}2b$ b

$1{,}1(a+b)$ $a+b$

по условию

$1{,}1(a+b) = 0{,}75a + 1{,}2b$

$1{,}1a + 1{,}1b = 0{,}75a + 1{,}2b$

$0{,}35a = 0{,}1b$

$a = \frac{10}{35}b = \frac{2}{7}b$

$1{,}1a + 1{,}1b + a + b < 250$

$2{,}2a + 2{,}2b < 250$

$\frac{2{,}2 \cdot 2}{7}b + 2{,}2b < 250$

$\frac{2{,}2(2+7)}{7}b < 250$

$b < \frac{250 \cdot 7}{2{,}2 \cdot 9} = \frac{\cancel{2500}^{1250} \cdot 7}{\cancel{22}_{11} \cdot 9}$

т.к b целое => $b < 88$

продолжение задачи 2.

в должно быть < 88 делится на 7 т.к $a = \frac{2}{7}в$ и a целое

и также при умножение на 1,1 ; 1,2 ; 0,75 оставаться целым

остается число 70, при котором всегда получаются

$в=70 \Rightarrow a=20$

первый кассир обязан целые значение.

$1,1(a+в) = 99$

Ответ: 99