11-20-456

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 63-11-257

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	13	9	4	10	10	15	15	86

Вариант 2

(1) $7\sqrt{2-\log_3 x} - 3|2\log_3 x - 5| \leq 7\log_3 x - 3|2\sqrt{2-\log_3 x} - 5|$

ОДЗ?

$7\sqrt{2-\log_3 x} + 3|2\sqrt{2-\log_3 x} - 5| \leq 7\log_3 x + 3|2\log_3 x - 5|$

Можно заметить, что $f(\sqrt{2-\log_3 x}) \leq f(\log_3 x)$, где $f(a) = 7a + 3|2a-5|$

$$f(a) = \begin{cases} 7a + 6a - 15, & a \geq \frac{5}{2} \\ 7a - 6a + 15, & a < \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$f(a) = \begin{cases} 13a - 15, & a \geq \frac{5}{2} \quad (1) \\ a + 15, & a < \frac{5}{2} \quad (2) \end{cases}$$

1) $f(a) = 13a - 15$
~~Зав-ть~~ ф-я линейная; графиком явл. прямая
$k = 13 \Rightarrow f(a)\uparrow$ при $x \in [\frac{5}{2}; +\infty)$
$f(\frac{5}{2}) = \frac{35}{2}$

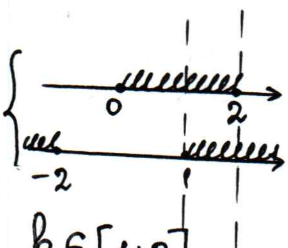
2) $f(a) = a + 15$
Линейная ф-я; графиком явл. прямая
$k = 1 \Rightarrow f(a)\uparrow$ $x \in (-\infty; \frac{5}{2})$
$f(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2} + 15 = \frac{35}{2}$

Функции (1) и (2) являются непрерывными на всей области определения, всегда возрастают $\Rightarrow$ решением нер-ва $f(\sqrt{2-\log_3 x}) \leq f(\log_3 x)$ явл. нер-во $\sqrt{2-\log_3 x} \leq \log_3 x$

Введем замену: $\log_3 x = b$
$x > 0$

$\sqrt{2-b} \leq b$

$$\begin{cases} b \geq 0 \\ 2-b \geq 0 \\ 2-b \leq b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b \leq 2 \\ b^2+b-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \in [0;2] \\ (b-1)(b+2) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



$b \in [1;2]$

Обратная замена:

$\log_3 x \in [1;2]$
$1 \leq \log_3 x \leq 2$
$3^1 \leq x \leq 3^2$
$3 \leq x \leq 9$

Ответ: $x \in [3;9]$

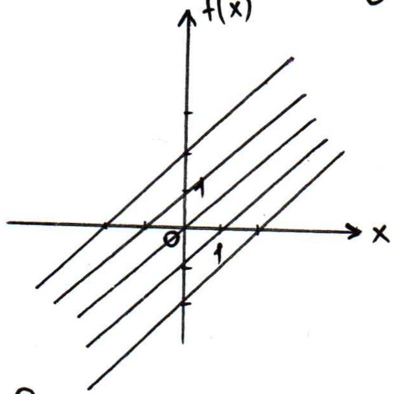
③ $f(x) = ax^2 + (3a+1)x + b$

$(4a+b) \rightarrow$ наим.

1. Рассмотрим случай, при котором $a = 0$:

$$f(x) = 0 \cdot x^2 + (3 \cdot 0 + 1)x + b$$
$$f(x) = x + b$$

$f(x)$ – линейная функция; $D(f(x)) = R$; графиком явл. (множ-во прямых) прямые, двигающ. вдоль оси Oy; $k = 1 \Rightarrow f(x) \uparrow$



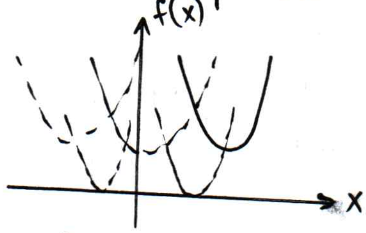
По условию задачи функция принимает неотрицательные значения для всех x. Если $f(x) = x + b$, то данное условие не может быть выполнено $\Rightarrow a \neq 0$

2. Рассмотрим ситуацию, при которой $a \neq 0$

$f(x) = ax^2 + (3a+1)x + b$

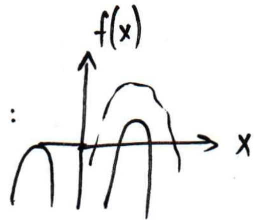
$f(x)$ – квадратичная ф-я; графиком явл. парабола

Для того чтобы ф-я принимала неотрицательные значения для всех x, парабола должна выглядеть следующим образом:



Это выполняется при условиях:
$$\begin{cases} a > 0 \\ D \leq 0 \end{cases}$$

Если $a < 0$, то функция будет принимать неотриц. значения:



$$D = (3a+1)^2 - 4 \cdot a \cdot b \leq 0$$
$$9a^2 + 6a + 1 - 4ab \leq 0$$

Пусть $(4a+b) = t$, тогда:
$$4a + b = t$$
$$b = t - 4a$$

Полученное выражение для b подставим в нер-во, полученное от дискриминанта

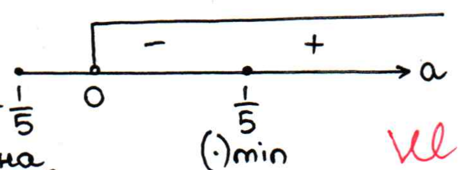
$$9a^2 + 6a + 1 - 4a(t - 4a) \leq 0$$
$$9a^2 + 6a + 1 - 4at + 16a^2 \leq 0$$
$$25a^2 + 6a + 1 \leq 4at$$
$$t \geq \frac{25a^2 + 6a + 1}{4a}$$

$$f(a) = \frac{25a^2 + 6a + 1}{4a}$$

$$f'(a) = \frac{(25 \cdot 2a + 6) \cdot 4a - 4(25a^2 + 6a + 1)}{16a^2} = \frac{100a^2 - 4}{16a^2}$$

$$f'(a) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{(10a-2)(10a+2)}{16a^2} = 0 \\ a > 0 \end{cases}$$



Т.к. $a = \frac{1}{5}$ – единств. (·)min на области ~~определения~~ $a > 0$, то в ней достигается наим. значение

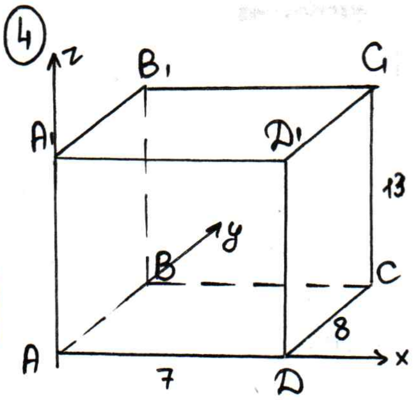
не доказ

$$f\left(\tfrac{1}{5}\right) = \frac{1 + \frac{6}{5} + 1}{\frac{4}{5}} = 4 \qquad t \geq 4 \qquad t_{наим} = 4$$

Ответ: 4

Продолжение

4



Пусть $AD = 7$; $AB = 8$; $AA_1 = 13$

Прямоуг. параллелепипед => в основании лежит прямоугольник ABCD => введем декартову систему координат через (·) A

Т.к. параллелепипед прямоуг., то его диагональ можно найти по формуле $D = \sqrt{7^2+8^2+13^2}$ => все диагонали равны => кол-во единичных кубиков, кот. проткнула игла, будет одинаковым для любой диагонали

Рассмотрим диагональ AC_1:

$A(0;0;0)$

$C_1(7;8;13)$ $\quad \bar{S}_{AC_1}\{7;8;13\}$

Из координат направл. вектора AC_1 видно, что кол-во плоскостей $\alpha \perp Ox$ равно 7; кол-во плоскостей $\beta \perp Oy$ равно 8; кол-во пл-й $\gamma \perp Oz$ равно 13

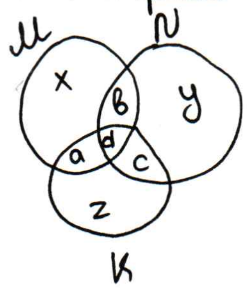
Плоскость α, β, γ – плоскости, образованные гранями единичных кубиков

Кол-во пл-ей α, β, γ и их пересечения между собой составляют конечные множества

По формуле включений и исключений для трех множеств, кот. явл. конечными:

$|M \cup N \cup K| = |M| + |N| + |K| - |M \cap N| - |M \cap K| - |K \cap N| + |M \cap N \cap K|$?

Рассмотрим три множества M, N, K:



x, y, z – элементы, входящие лишь в одно множество

a, b, c – элементы, входящие в два множества одновременно

d – элементы, входящие в три множества одновременно

$|M \cup N \cup K| = x+y+z+a+b+c+d = (x+a+b+d) + (b+y+d+c) + (a+d+c+z) - (b+d) - (a+d) - (c+d) + d = x + y + z + 2b + 2a + 2c + 3d - b - a - c - 3d + d =$
$= x+y+z+a+b+c+d$

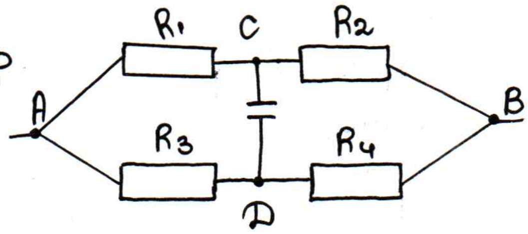
Для нашей задачи $|M| = 7$, $|N| = 8$, $|K| = 13$, $|M \cap N| = НОД(7;8) = 1$;
$|M \cap K| = НОД(7;13) = 1$; $|K \cap N| = НОД(8;13) = 1$; $|M \cap N \cap K| = НОД(7;8;13) = 1$

$|M \cup N \cup K| = 7+8+13-1-1-1+1 = 26$

Ответ: 26 кубиков

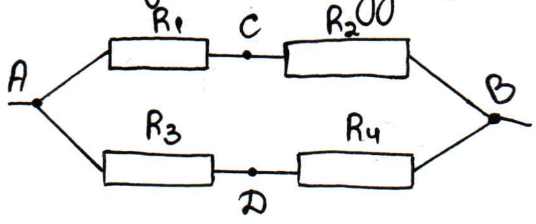
6

$C = 500 \cdot 10^{-6}$ Ф
$R_1 = 20$ Ом
$R_2 = 10$ Ом
$R_3 = 40$ Ом
$R_4 = 30$ Ом
$U_0 = 420$ В
$q_c - ?$



Т.к. по условию задачи сказано, что после подсоединения источника прошло достаточно большое кол-во времени, то конденсатор уже успел зарядиться. Следовательно, можно считать, что в установившемся режиме ток через конденсатор не идет.

Можно построить эквивалентную схему, которая будет выглядеть следующим образом:



Т.к. резисторах (R_1+R_2) и резисторах (R_3+R_4) соединены между собой параллельно, то $U_0 = U_{12} = U_{34}$

$$I_{12} = \frac{U_0}{R_1+R_2} = \frac{420}{20+10} = 14 A$$

$$I_{34} = \frac{U_0}{R_3+R_4} = \frac{420}{40+30} = 6 A$$

$$\varphi_C - \varphi_A = U_1 = I_{12} R_1 = 14 \cdot 20 = 280 В$$

$$\varphi_D - \varphi_A = U_3 = I_{34} R_3 = 6 \cdot 40 = 240 В$$

U_1 и U_3 – напряжения на резисторах R_1 и R_3 соответственно.

$$-\begin{cases} \varphi_C - \varphi_A = 280 \\ \varphi_D - \varphi_A = 240 \end{cases}$$

$$\varphi_C - \varphi_D = 280 - 240$$

$$\varphi_C - \varphi_D = 40 В$$

$$q_c = CU_c; \quad U_c = \varphi_C - \varphi_D$$

$$q_c = C(\varphi_C - \varphi_D) = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 20 \cdot 10^{-3} Кл$$

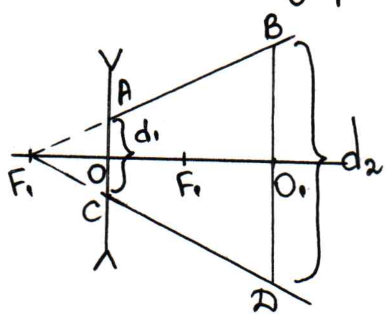
Ответ: $20 \cdot 10^{-3}$ Кл

8

$D_1 = -5$ Дптр
$d_1 = 0{,}06$ м
$d_2 = 0{,}12$ м
$D_2 - ?$

Обозначим D_1 как оптическую силу рассеивающей линзы; D_2 как оптическую силу собирающей линзы

Построим изображение для рассеивающей линзы:



$\Delta F_1AO \sim \Delta F_1BO_1$ по $2\angle$ $\quad (D = -\frac{1}{F}$ для расс. л.$)$

$$\Rightarrow \frac{d_1 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot d_2} = \frac{OF_1}{OF_1 + OO_1}; \quad OF_1 = -\frac{1}{D_1} = F_1 = \frac{1}{5} = 0{,}2 м$$

$$\frac{0{,}06}{0{,}12} = \frac{F_1}{F_1 + OO_1}; \quad \frac{1}{2} = \frac{0{,}2}{0{,}2 + OO_1} \Rightarrow OO_1 = 0{,}2 м$$

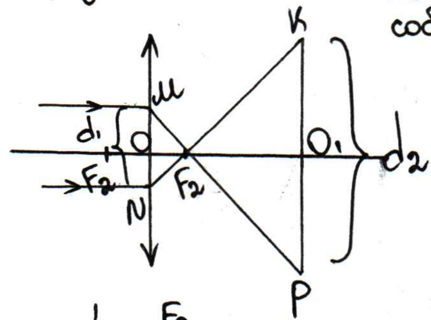
$OF_1 = F_1$ – фокусное расс-е рассеивающей линзы

11-20-456

63-11-257

(8) Продолжение

Построим изображение для собирающей линзы:



$\Delta MF_2O \sim \Delta KF_2O_1$ по 2∠

$$\frac{d_1 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot d_2} = \frac{OF_2}{OO_1 - OF_2}$$

$OF_2 = F_2$ – фокусное расс-е для собирающей линзы

$$\frac{1}{2} = \frac{F_2}{0{,}2 - F_2} \Rightarrow 0{,}2 - F_2 = 2F_2$$

$$3F_2 = 0{,}2$$

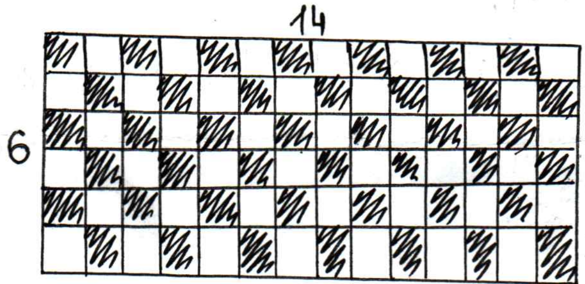
$$F_2 = \frac{0{,}2}{3} = \frac{1}{15} \text{ м}$$

$$D = \frac{1}{F}$$

$$D_2 = \frac{1}{F_2} = 15 \text{ Дптр}$$

Ответ: 15 Дптр

(2) Всего клеток в прямоугольнике $= 6 \cdot 14 = 84$ кл.
Т.к. по условию задачи сказано, что при расстановке цветов не происходит резкой смены цвета, то:
1. черные и белые цвета не могут находиться рядом
2. между черным и белым цветом всегда будет серый



Начнем расстановку с левого верхнего угла. Поместим туда серый цвет.
Закрашенной клеткой на рисунке отмечен серый цвет, а незакрашенные клетки либо белые, либо черные.

Из рисунка видно, что при данных условиях серый цвет располагается по „шахматному" принципу => серые клетки занимают $\frac{1}{2}$ от кол-ва всех клеток, т.е. $\frac{1}{2} \cdot 84 = 42$ кл. Тогда на белые и черные клетки останется также 42 кл.
Кол-во вариантов расставить 2 цвета на 42 клетки равно 2^{42}
Кол-во вариантов расставить 3 цвета на 84 клетки равно 3^{84}.
Тогда, вероятность такой расстановки $P_1 = \frac{2^{42}}{3^{84}}$

(+)

Рассмотрим ситуацию, при которой в левом верхнем углу будет помещен белый или черный цвет. Серый также будет расставлен по „шахматному" принципу. Аналогично белые и черные будут занимать ~~48 клеток~~ 42 клетки.
Вероятность такой расстановки $P_2 = \frac{2^{42}}{3^{84}}$ аналогично.

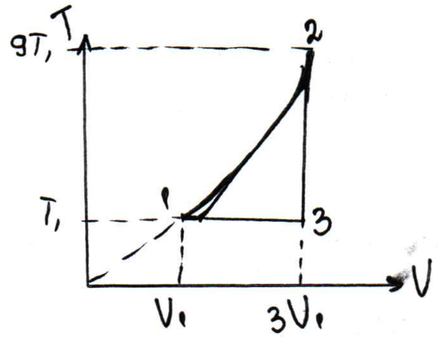
$$P = P_1 + P_2 = \frac{2^{42}}{3^{84}} + \frac{2^{42}}{3^{84}} = 2 \cdot \frac{2^{42}}{3^{84}} = \frac{2^{43}}{3^{84}}$$

Ответ: $\frac{2^{43}}{2^{84}}$

⑦

$1-2: \; T = kV^2$
$2-3: \; V = const$
$3-1: \; T = const$
$V_{max} = 3V_{min}$
$A_{12} = 3{,}64 A_{31}$

$\eta - ?$



На участке 1-2:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1^2}{V_2^2}$$

$V_{min} = V_1$; $V_{max} = V_2 = V_3 = 3V_1$

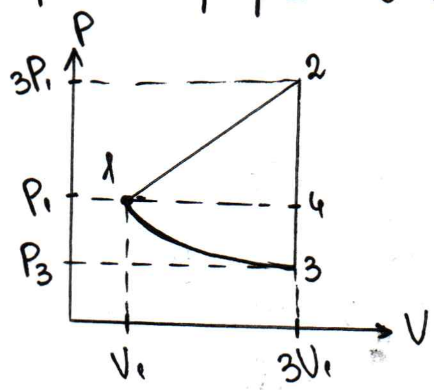
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\cancel{V_1^2}}{9\cancel{V_1^2}} \Rightarrow T_1 = \frac{T_2}{9}$$

Для участка 3-1: $P_3V_3 = P_1V_1$

$$P_1 = \frac{P_3V_3}{V_1} = 3P_3$$

Для точки 1: Для точки 2: $\begin{cases} P_1V_1 = \nu RT_1 \\ P_2 \cdot 3V_1 = \nu R \cdot 9T_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{P_1\cancel{V_1}}{3P_2\cancel{V_1}} = \frac{1}{9} \Rightarrow P_1 = \frac{P_2}{3}$

Перестроим график в координатах P-V:



Укажем на графике (·)4, в кот. давление равно P_1

$$\eta = \frac{A}{Q_H}$$

$A = A_{1241} + A_{1431}$

$A_{1241} = \frac{1}{2}(3P_1 - P_1)(3V_1 - V_1) = 2P_1V_1$

$A_{1431} = 3P_1V_1 - A_{13}$; $A_{13} = \frac{A_{12}}{3{,}64}$; $A_{12} = \frac{P_1 + 3P_1}{2} \cdot (3V_1 - V_1) = 4P_1V_1$

$A_{1431} = 3P_1V_1 - \frac{4P_1V_1}{3{,}64} = \frac{173}{91}P_1V_1$

$A = 2P_1V_1 + \frac{173}{91}P_1V_1 = \frac{355}{91}P_1V_1$

$Q_H = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}$

$\left.\begin{matrix} \Delta U_{12} = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1) \\ PV = \nu RT \end{matrix}\right| \Rightarrow \Delta U_{12} = \frac{i}{2}(P_2V_2 - P_1V_1) = \frac{i}{2}(3P_1 \cdot 3V_1 - P_1V_1) = 4iP_1V_1$

$A_{12} = 4P_1V_1$

$Q_H = 4iP_1V_1 + 4P_1V_1 = 4P_1V_1(i+1)$

$$\eta = \frac{355\cancel{P_1V_1}}{91 \cdot 4\cancel{P_1V_1}(i+1)} = \frac{355}{91 \cdot 4(i+1)}$$

Для одноатомного газа $i=3$: $\eta = \frac{355}{91 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{355}{91 \cdot 16} \approx 0{,}244$ $\quad \eta_1 = 24{,}4\%$

Для двухатомного газа $i=5$: $\eta = \frac{355}{91 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{355}{91 \cdot 24} \approx \cancel{0{,}112}$ $0{,}157$ $\quad \eta_2 = 15{,}7\%$ $\cancel{\eta_2 = 11{,}2\%}$

Для многоатомного газа $i=6$: $\eta = \frac{355}{364 \cdot 7} \approx 0{,}1389$ $\quad \eta_3 = 13{,}9\%$

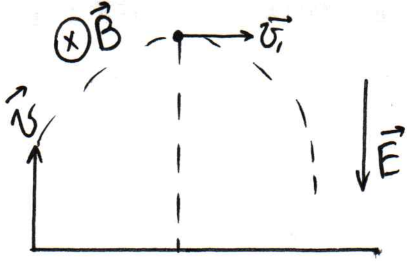
Ответ: $\eta_1 = 24{,}4\%$; $\eta_2 = 15{,}7\%$; $\eta_3 = 13{,}9\%$

11-20-456

63-11-257

5

$m; q; B; E$
h
$t - ?$



Влетая в однородное горизонтальное м. поле, частица начнет двигаться по окружности $\Rightarrow F_л = ma_ц$

$F_л = Bvq \cancel{\sin\alpha}$
$a_ц = \frac{v^2}{R}$
$\Rightarrow Bvq = \frac{mv^2}{R}$

$R = \frac{mv}{Bq}$

Высота h, на кот. частица влетела в м. п., будет равна радиусу окр-ти.

В наивысшей точке своего полета скорость частицы будет направлена горизонтально => до момента вылета она пройдет $\frac{1}{4}$ длины окружности $\Rightarrow t_1 = \frac{1}{4}T$

$T = \frac{2\pi R}{v}$; $R = \frac{mv}{Bq}$

$T = \frac{2\pi}{\cancel{v}} \cdot \frac{m\cancel{v}}{Bq} = \frac{2\pi m}{Bq}$; $t_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi m}{Bq} = \frac{\pi m}{2Bq}$

При попадании в электрическое поле частица начнет двигаться равноускоренно =>

$F_{эл} = ma$
$F_{эл} = Eq$ $\qquad ma = Eq$
$a = \frac{Eq}{m}$

$h = R = \frac{at_2^2}{2} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot mv \cdot m}{Bq \cdot Eq}} = \frac{m}{q}\sqrt{\frac{2v}{BE}}$

$v_{0_1} = 0$ т.к. при вылете из м.п. $E_к$ не меняется

$A = \Delta E_к$
$A = qU$; $\Delta E_к = \frac{mv^2}{2}$
$qU = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$

$U = \varphi_2 - \cancel{\varphi_1}^{0} = \varphi_2 = \frac{kq}{R}$ (как потенциал поля точечного заряда)

$U = \frac{kq}{h}$

$v = \sqrt{\frac{2q \cdot kq}{mh}} = q\sqrt{\frac{2k}{mh}}$

$t_2 = \frac{m}{q}\sqrt{\frac{2q}{BE}\sqrt{\frac{2k}{mh}}}$

$t = t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{2Bq} + \frac{m}{q}\sqrt{\frac{2q}{BE}\sqrt{\frac{2k}{mh}}} = \frac{m}{q}\left(\frac{\pi}{2B} + \sqrt{\frac{2q}{BE}\sqrt{\frac{2k}{mh}}}\right)$

Ответ: $t = \frac{m}{q}\left(\frac{\pi}{2B} + \sqrt{\frac{2q}{BE}\sqrt{\frac{2k}{mh}}}\right)$