

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 6309-11

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	12	13	—	—	10	15	8	70

Вариант 1

$$\sim 1) \begin{cases} x^2 + z = (y+z)^2 \\ y^2 + 3 = (x+z)^2 \\ z^2 + 4 = (x+y)^2 \end{cases} \begin{cases} 2 = (y+z)^2 - x^2 \\ 3 = (x+z)^2 - y^2 \\ 4 = (x+y)^2 - z^2 \end{cases} + \begin{cases} 2 = (y+z+x)(y+z-x) \\ 3 = (x+z+y)(x+z-y) \\ 4 = (x+y+z)(x+y-z) \end{cases}$$

$$2+3+4 = (x+y+z)(y+z-x+x+z-y+x+y-z)$$

$$9 = (x+y+z)(x+y+z)$$

$$3^2 = (x+y+z)^2$$

~~т.к. по условию нули~~

$$(x+y+z)^2 - 3^2 = 0$$

$$(x+y+z+3)(x+y+z-3) = 0 \Rightarrow x+y+z+3=0 \quad \text{или} \quad x+y+z-3=0$$

$$x+y+z = -3$$

$$x+y+z = 3 \Rightarrow$$

$$y+z = 3-x, \quad x+z = 3-y, \quad x+y = 3-z$$

т.к. по условию нули
только неотриц. корни,
значит их сумма $> 0 \Rightarrow$
 $x+y+z \neq -3$

$$x^2 + z = (3-x)^2$$

$$y^2 + 3 = (3-y)^2$$

$$3 = 3 - x - y$$

$$x^2 + z = 9 - 6x + x^2$$

$$y^2 + 3 = 9 - 6y + y^2$$

$$z = 3 - 1\frac{1}{6} - 1$$

$$6x = 7$$

$$6y = 6$$

$$z = \frac{5}{6}$$

$$x = 1\frac{1}{6}$$

$$y = 1$$

$$\text{Ответ: } x = 1\frac{1}{6}, y = 1, z = \frac{5}{6}$$

~2) пусть $x_{\text{поп.}}$ — обслужит 1-й пассажир до обеда, $y_{\text{поп.}}$ — обслужит 2-й пассажир после обеда

тогда $\frac{3}{4}x_{\text{поп.}}$ — обслужит 1-й до обеда, $\frac{6}{5}y$ — обслужит 1-й после обеда

$$\frac{110}{100}(x+y) = \frac{3}{4}x + \frac{6}{5}y$$

$$11x + 11y = 2\frac{1}{4}x + 12\frac{1}{5}y$$

$$11x + 11y = 4\frac{1}{4}x + 12y$$

$$y = 3,5x \Rightarrow \frac{2y}{4} = x. \quad \text{т.к. покупателей было меньше}$$

ное число, значит $\frac{2y}{4} \in \mathbb{N}$, $\frac{6y}{5} \in \mathbb{N} \Rightarrow y:4, y:5, y \in \mathbb{N}$.

Значит "y" может принимать значения 35; 40; 105; ...

Тогда "x" принимает значения ~~10; 20; 30; ...~~ соответственно.

Заметим, что при $y=105, x=30$ $x+y=135$ - обслужим второй, тогда $\frac{110}{100}(x+y)$

$$= \frac{11}{100} \cdot \frac{27}{25} = 148, \\ \text{обслужим 1-ый}$$

но ~~во-первых~~ $135+148,5 > 250 \Rightarrow$ не удовлетворяет условию. Значит все $y > 105$ можно не считать, т.к. тогда они обслужат > 250 покупателей.

Остается $y=35$ и $y=40$. Но при $y=35$ $x=10$, хотя по условию $\frac{3}{4}x \in \mathbb{N}$

но $\frac{3}{4} \cdot 10 \notin \mathbb{N} \Rightarrow y=35$ и $x=10$ не подходит. Остается только $y=40$ и x который удовлетворяет условию. $\Rightarrow x+y=90$ пок. - обслужим 2-й на

Ответ: 90 покупателей.

{ также возможно оба киоска не обслужили, т.е. каждый по 0 покупателей.
тогда все условия выполняются, т.к. $0 = 45\% \cdot 0$, $0 = 110\% \cdot 0$, $0 < 250$ пок.
поэтому возможен ответ 0 покупателей

н 3) Чтобы найти кол-во многоугольников с точкой A, нужно взять её и все пары точек из 2023 других, её и все тройки точек и т.д. количество пар точек это число сочетаний 2 из 2023 или C_{2023}^2 , кол-во троек это C_{2023}^3 , и т.д. То есть всего у нас будет $C_{2023}^2 + C_{2023}^3 + \dots + 1$ вариантов многоугольников с точкой A.

Теперь рассмотрим без неё: надо взять все тройки точек, все четвёрки точек и т.д., то есть $C_{2023}^3 + C_{2023}^4 + C_{2023}^5 + \dots + C_{2023}^{2023}$

Заметим, что с точкой A будет столько же многоугольников и ещё C_{2023}^2 . То есть с точкой A будет больше на $\frac{2023!}{(2023-2)! \cdot 2!}$

$$= \frac{2023!}{2021! \cdot 2!} = \frac{2023 \cdot 2022}{2} \approx 2023 \cdot 1011$$

Ответ: с точкой A будет больше на 2023 · 1011.



№6) Пусть h_1 - высота льда изначально, h_2 - начальная высота воды

63-09-14

h - новая высота воды.

т.к. общая масса не изменилась, мы можем начальную и конечную приравнять:

$$m_f + m_1 = m$$

$$\rho_f \cdot S \cdot h_f + \rho_l \cdot S \cdot h_1 = \rho_f \cdot h \cdot S$$

$$\rho_f \cdot h_f + \rho_l \cdot h_1 = \rho_f \cdot h$$

$$\rho_l \cdot h_1 = \rho_f (h - h_f)$$

$$\begin{cases} 0,9 \cdot h_1 = 1(115 - h_f) \\ h_1 + h_f = 120 \end{cases}$$

$h_1 + h_f = 120$ - начальная высота
вычтем из 2-го равенства первое

$$h_1 + h_f - 0,9 h_1 = 120 - 115 + h_f$$

$$0,1 h_1 = 5$$

$$h_1 = 50 \text{ см} \Rightarrow m_1 = \rho_l \cdot V = \rho_l \cdot S \cdot h_1 = 0,92 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot 15 \text{ см}^2 \cdot 50 \text{ см} = 675 \text{ г}$$



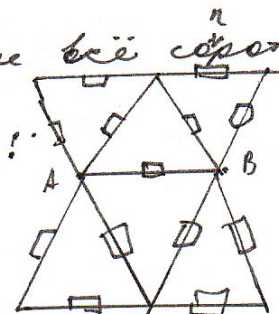
$$50 \text{ см} + h_f = 120 \text{ см}$$

$$h_f = 70 \text{ см} \Rightarrow m_f = \rho_f \cdot V = \rho_f \cdot S \cdot h_f = 1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \cdot 15 \text{ см}^2 \cdot 70 \text{ см} = 1050 \text{ г}$$

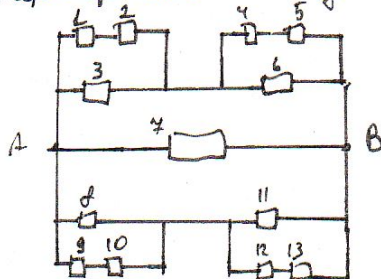
Ответ: $m_{\text{льда}} = 675 \text{ г}$, $m_{\text{воды}} = 1050 \text{ г}$

№7.

Для удобства, будем считать, что в каждой вершине все сопротивления в 1 точке. Тогда схема будет выглядеть вот так!:



Перечертим схему в более удобном виде:



Для удобства пронумеруем ветки линиями 1-13.

Заметим, что R_{113} , R_{456} , R_{8910} , R_{1112} аналогичны,

Пусть на каждой сопротивлении R . Посчитаем

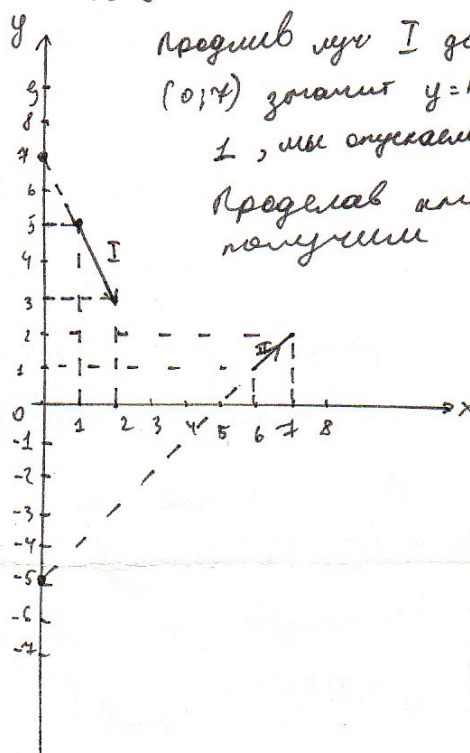
то: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{2R_0} + \frac{1}{R_0} = \frac{3}{2R_0} \Rightarrow R = \frac{2}{3} R_0$. Теперь, назовём сопротивление на ветках 1-6 $R_{\text{всн.}}$, а на 8-13 $R_{\text{внн.}}$, тогда $R_{\text{всн.}} = R_{\text{внн.}} = 2R = \frac{4}{3} R_0$

А значит сопротивление R_{AB} считается по закону параллельного соединения: $\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{\text{сер.}}} + \frac{1}{R_{\text{парал.}}} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{\frac{4}{3}R_0} + \frac{1}{\frac{4}{3}R_0} = \frac{1}{R_0} + \frac{3}{4R_0} + \frac{3}{4R_0} =$

$$= \frac{2}{2R_0} + \frac{3}{2R_0} = \frac{5}{2R_0} \Rightarrow R_{AB} = \frac{2}{5} \cdot R_0 = 0,4 \cdot R_0 = 0,4 \cdot 10 \text{ Ом} = 4 \text{ Ом}$$

Ответ: 4 Ом

№8.



представив лун I до оси Ox мы видим, что он пересекает её в точке $(0; 4)$ значит $y = kx + m$, $m = 4$. Также, мы видим, что спускаясь по x на 1, мы спускаемся по y на 2 $\Rightarrow k = -2 \Rightarrow y_1 = -2x + 4$. ✓

Проведем аналогичные действия для отраженного луча, мы получим $y_2 = x - 5$. ✓ Точка отражения это точка пересечения данных функций: $y_1 = y_2$

$$-2x + 4 = x - 5$$

$$3x = 9$$

$$x = 3 \Rightarrow y = -2 \cdot 3 + 4 = -2 \Rightarrow$$

координаты точки отражения $(3; -2)$ ✓