



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 63-11-301

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	9	8	8	7	10	10	15	15	79

Вариант 2

$$\sqrt{7} \cdot |7\sqrt{2-\log_3 x} - 3| \cdot 2\log_3 x - 5| \leq 7\log_3 x - 3| \cdot 2\sqrt{\log_3 x + 2} - 5|$$

$$7\sqrt{2-\log_3 x} + 3| \cdot 2\sqrt{2-\log_3 x} - 5| \leq 7\log_3 x + 3| \cdot 2\log_3 x - 5|$$

$$f(\sqrt{2-\log_3 x}) \leq f(\log_3 x), \text{ где } f(t) = 7t + 3| \cdot 2t - 5|$$

$$f(t) = \begin{cases} 7t + 6t - 15, & t \geq 2,5 \\ 7t - 6t + 15, & t < 2,5 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 13t - 15, & t \geq 2,5 \\ t + 15, & t < 2,5 \end{cases}$$

Функция $f(t)$ непрерывная, возрастает на $t \in \mathbb{R}$.

Значит, изначальное неравенство эквивалентно неравенству:

$$\sqrt{2-\log_3 x} \leq \log_3 x$$

$$\log_3 x = t$$

$$\sqrt{2-t} \leq t$$

$$\begin{cases} 2-t \geq 0 \\ t \geq 0 \\ 2-t \leq t^2 \end{cases}$$

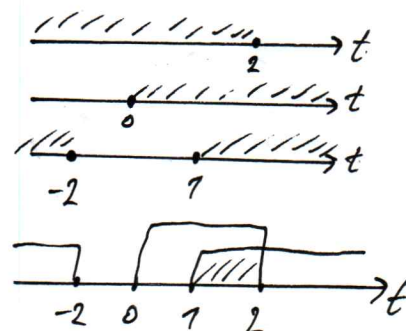
$$\begin{cases} t \leq 2 \\ t \geq 0 \\ t^2 + t - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \leq 2 \\ t \geq 0 \\ (t-1)(t+2) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \geq 1 \\ t \leq 2 \end{cases}$$

Вернёмся к замене: $\begin{cases} \log_3 x \geq 1 \\ \log_3 x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 9 \end{cases}$

Ответ: $x \in [3; 9]$



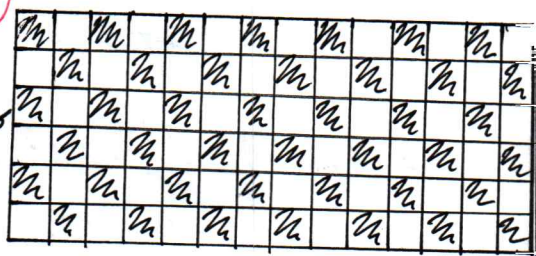
№2. Предположим, что Петя начинает раскрашивать прямоугольник с верхнего левого угла. Так как белая и черная клетки не ~~будут~~ соседями, то серые клетки будут расположены в шахматном порядке, ~~то есть~~. Так как длины сторон прямоугольника - четные числа, то количество серых клеток не зависит от цвета первой клетки. Так как Петя раскрашивает клетки ~~по~~ групп за группой, то общая вероятность складывается как произведение вероятностей серых и не-серых клеток в степени их количества. Количество серых и несерых клеток одинаковы и равны: $\frac{6 \cdot 14}{2} = 42$

$\frac{2}{3}$ - вероятность несерой клетки

$\frac{1}{3}$ - вероятность серой клетки.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{42} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{42} = \frac{2^{42}}{3^{84}} - \text{общая вероятность}$$

Ответ: $\frac{2^{42}}{3^{84}}$



№3. $f(x) = 4x^2 + (3a+1)x + b$

Так как функция принимает неотрицательные значения для всех x то:

$$\begin{cases} a > 0 \\ D \leq 0 \end{cases}$$

$a > 0, a < 0?$

$$D = (3a+1)^2 - 4ab$$

Пусть $4a+b=c$, где c - наименьшее значение

Тогда $b = c - 4a$

$$D = 9a^2 + 6a + 1 - 4a(c - 4a) + 16a^2 = 25a^2 + 10a + 1 - 4ac - 4a =$$

$$= (5a+1)^2 - 4a(c+1)$$

$$(5a+1)^2 - 4a(c+1) \leq 0$$

$$c+1 \geq \frac{(5a+1)^2}{4a}$$



$$C \geq \frac{(5a+1)^2}{4a} - 7$$

11-15-456

163-11.301

$$f(a) = \frac{(5a+1)^2}{4a} - 7$$

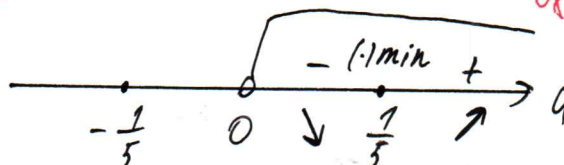
$$f'(a) = \frac{10(5a+1) \cdot 4a - 4(5a+1)^2}{4a^2} = \frac{(5a+1)(10a-5a-1)}{4a^2} =$$

$$= \frac{(5a+1)(5a-1)}{4a^2}$$

$$f'(a) = 0$$

$$\frac{(5a+1)(5a-1)}{4a^2} = 0$$

поиск минимума



$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{(5 \cdot \frac{1}{5} + 1)^2}{4 \cdot \frac{1}{5}} - 7 = \frac{4 \cdot 5}{4} - 7 = 4$$



$$C = 4$$

Ответ: 4

№4. Количество единичных кубиков в прямоугольном параллелепипеде с длинами ребер a, b, c считается по формуле: $a+b+c - \text{НОД}(a;b) - \text{НОД}(b;c) - \text{НОД}(a;c) + \text{НОД}(a;b;c)$.
Например, прямоугольный параллелепипед размерами $1 \times 1 \times 1$
 $1+1+1 - 1 - 1 - 1 + 1 = 1$ верно.

Например, прямоугольный параллелепипед размерами $5 \times 5 \times 5$
 $5+5+5 - 5 - 5 - 5 + 5 = 5$ верно.

Тогда для прямоугольного параллелепипеда размерами $7 \times 8 \times 13$ количество единичных кубиков, пересеченных большей диагональю равно: $7+8+13 - \text{НОД}(7;8) - \text{НОД}(8;13) - \text{НОД}(7;13) + \text{НОД}(7;8;13) = 28 - 1 - 1 - 1 + 1 = 26$

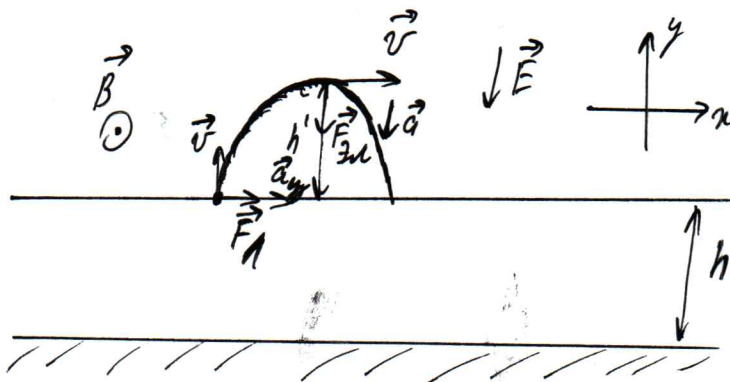
Ответ: 26.

№5. Дано:

m, q, h, B, E

$t - ?$

Решение:



Так как в однородном магнитном поле частица движется по окружности, то ~~при достижении максимальной скорости~~ при достижении наивысшей точки пути она поднимется на расстояние h' , равное радиусу окружности, относительно высоты h и пройдет четверть окружности, а скорость будет направлена горизонтально.

По II закону Ньютона:

$$\vec{F}_L = \vec{a}_c m$$

$$q v B = \frac{m v^2}{R}$$

$$R = \frac{m v}{q B}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m v}{v q B} = \frac{2\pi m}{q B}$$

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{2\pi m}{4 q B} = \frac{\pi m}{2 q B}$$

В электрическом поле движение по горизонтали равномерное, по вертикали равноускоренное, так как действует $F_{эл}$.

По II закону Ньютона:

$$\vec{F}_{эл} = \vec{a} m$$

$$E q = a m$$

$$a = \frac{E q}{m}$$

$$h' = v_0 t_2 + \frac{a t_2^2}{2}$$

$$\frac{m v}{q B} = \frac{E q t_2^2}{2 m}$$



11-15-456

$$t_2 = \sqrt{\frac{2m^2v}{q^2EB}} = \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{EB}} \quad \text{6.3.11.301}$$

$$t = t_1 + t_2$$

$$t = \frac{\pi m}{2qB} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{EB}}$$

Ответ: $t = \frac{\pi m}{2qB} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{EB}}$

№6. Дано:

$$C = 500 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$R_1 = 20 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 10 \text{ Ом}$$

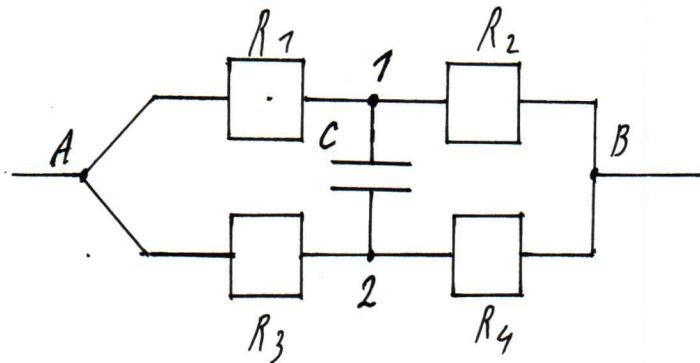
$$R_3 = 40 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 30 \text{ Ом}$$

$$U_0 = 420 \text{ В}$$

$q = ?$

Решение:



Через большой промежуток времени конденсатор зарядится и ток не будет через него идти.

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 20 + 10 = 30 \text{ Ом}$$

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 40 + 30 = 70 \text{ Ом}$$

$$R_0 = \frac{R_{12} R_{34}}{R_{12} + R_{34}} = \frac{30 \cdot 70}{30 + 70} = 21 \text{ Ом}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0} = \frac{420}{21} = 20 \text{ А}$$

$$I_{12} = I_1 = I_2 = \frac{U_0}{R_{12}} = \frac{420}{30} = 14 \text{ А}$$

$$I_{34} = I_3 = I_4 = \frac{U_0}{R_{34}} = \frac{420}{70} = 6 \text{ А}$$

$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_A = U_1 = I_1 R_1 = 14 \cdot 20 = 280 \text{ В} \\ \varphi_2 - \varphi_A = U_3 = I_3 R_3 = 6 \cdot 40 = 240 \text{ В} \end{cases}$$

$$\varphi_1 - \varphi_A - \varphi_2 + \varphi_A = 280 - 240 \text{ В}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 40 \text{ В}$$

$$C = \frac{q}{U_C}; \quad U_C = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$q = C(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$q = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ К} = 20 \text{ мКл}$$

Ответ: 20 мКл.

№7. Дано:

$$T = kV^2$$

$$V_3 = V_2 = 3V_1$$

$$A_{12} = 3,64 |A_{31}|$$

$\eta = ?$

Решение:

$$p_1 V_1 = 2RT_1$$

$$p_1 V_1 = 2RkV_1^2$$

$$p_1 = 2RkV_1$$

$$p_2 = 2RkV_2 = 3 \cdot 2RkV_1$$

$$p_2 = 3p_1$$

$$3-1: T = \text{const}$$

$$p_3 V_3 = p_1 V_1$$

$$p_3 = \frac{p_1 V_1}{V_3} = \frac{p_1 V_1}{3V_1}$$

$$p_3 = \frac{p_1}{3}$$

$$\eta = \frac{A}{Q_H}$$

$$A = A_{12} - A_{31}$$

$$A_{31} = \frac{100 A_{12}}{364} = \frac{25 A_{12}}{91}$$

$$A = A_{12} - \frac{25 A_{12}}{91} = \frac{66 A_{12}}{91}$$

$$A_{12} = \frac{p_1 + 3p_2}{2} \cdot (2V_1 - V_1) = 4p_1 V_1$$

$$A = \frac{66 \cdot 4p_1 V_1}{91} = \frac{264 p_1 V_1}{91}$$

$$Q_H = A_{12} + A U_{12}$$

$$A U_{12} = \frac{i}{2} 2R(T_2 - T_1) = \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{i}{2} (9p_1 V_1 - p_1 V_1) = 4i p_1 V_1$$

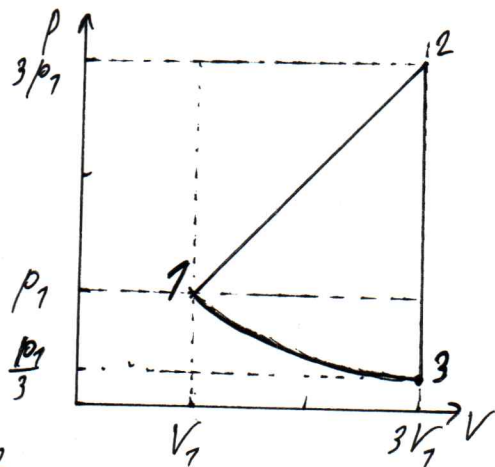
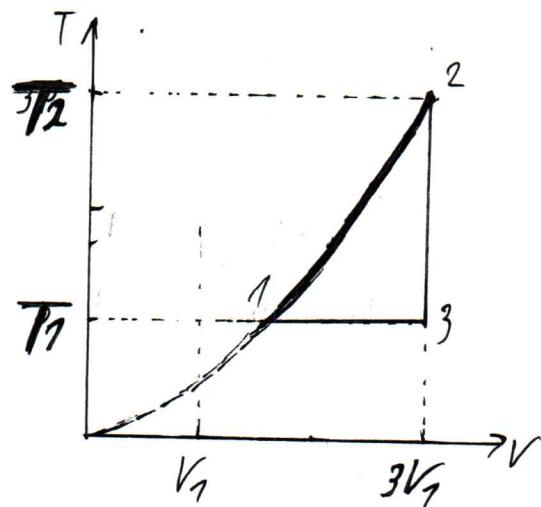
$$Q_H = 4p_1 V_1 + 4i p_1 V_1 = 4p_1 V_1 (1+i)$$

$$\eta = \frac{264 p_1 V_1}{91 \cdot 4p_1 V_1 (1+i)} = \frac{66}{91(1+i)}$$

Если газ одноатомный, то $i = 3$

$$\eta = \frac{3368}{91 \cdot 4} \approx 0,78$$

$$\eta = 78\%$$





11-15-456

Если газ двухатомный, то $i = 5$

163/11.301

$$\eta = \frac{11.66}{91.8} \approx 0.12$$

$$\eta = 12\%$$

Если газ многоатомный, то $i = 6$

$$\eta = \frac{6.6}{91.7} \approx 0.1$$

$$\eta = 10\%$$

Ответ: 18%; 12%; 10%

№8. Дано:

$$D_p = -5 \text{ Дин}$$

$$d_1 = 6 \text{ см}$$

$$d_2 = 12 \text{ см}$$

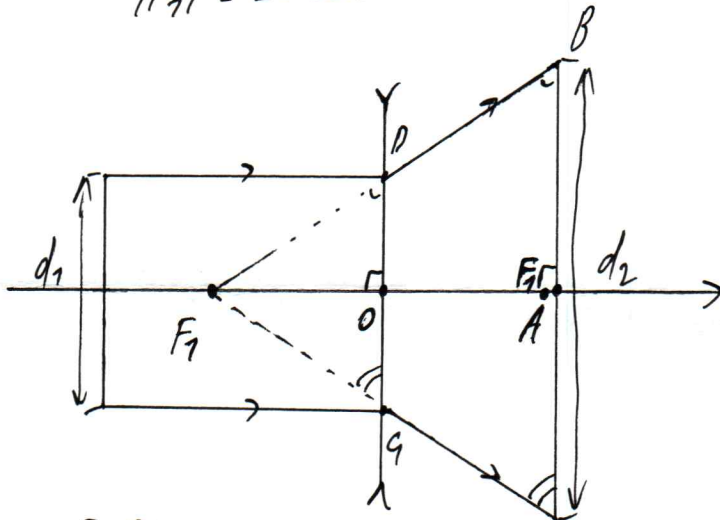
$D_c = ?$

Решение:

$$D_p = \frac{1}{F_1}$$

$$F_1 = \frac{1}{D_p} = -\frac{1}{5} = -0.2 \text{ м}$$

$$|F_1| = 20 \text{ см}$$

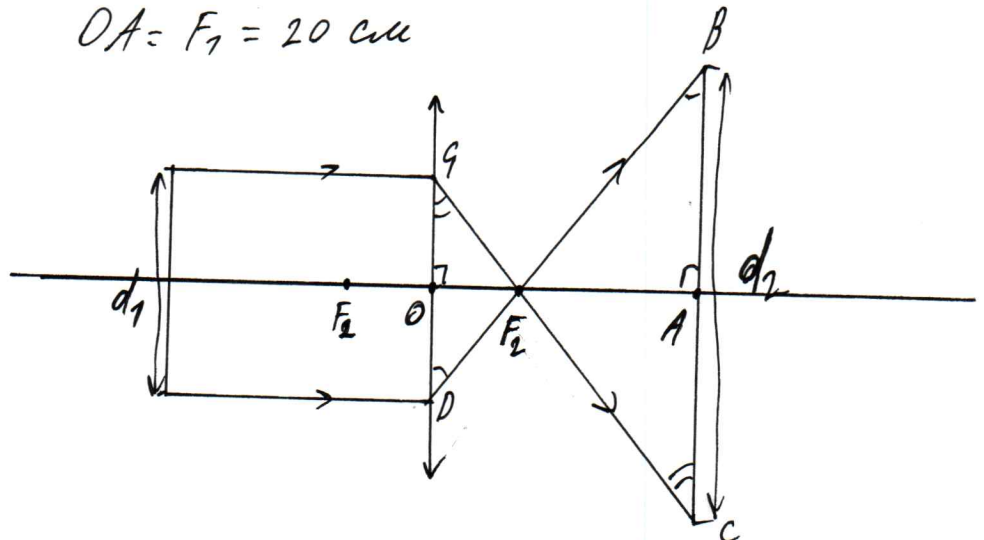


$\triangle F_1 D G \sim \triangle F_1 B C$ по двум углам

$$\frac{F_1}{F_1 + OA} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$2F_1 = F_1 + OA$$

$$OA = F_1 = 20 \text{ см}$$



$\Delta F_2 BC \sim \Delta F_2 DQ$ по общей грани

$$\frac{OA - F_2}{F_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{12}{6} = 2$$

$$2F_2 = OA - F_2$$

$$F_2 = \frac{OA}{3} = \frac{20}{3} \approx 6,67 \text{ см} \approx 0,067 \text{ м}$$

$$D_c = \frac{1}{F_2} = \frac{1}{0,067} \approx 15 \text{ Damp}$$

Ответ: $D_c = 15 \text{ Damp}$