



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 23-11-15

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

№1

$$9\sqrt{2-\log_2 x} - 2|4\log_2 x - 7| \leq 9\log_2 x - 2|4\sqrt{2-\log_2 x} - 7|$$

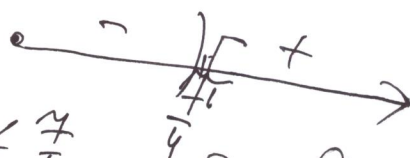
Пусть: $t_1 = \sqrt{2-\log_2 x}$; $t_2 = \log_2 x$, тогда
можно записать неравенство в виде:

$$9t_1 - 2|4t_2 - 7| \leq 9t_2 - 2|4t_1 - 7| \quad 9t_1 + 2|4t_1 - 7| \leq 9t_2 + 2|4t_2 - 7|$$

Введём функцию: $f(t) = 9t + 2|4t - 7|$

$$4t - 7 = 0 \quad t = \frac{7}{4}$$

$$f(t) = \begin{cases} 9t - 2(7 - 4t), & t < \frac{7}{4} \\ 9t + 2(4t - 7), & t \geq \frac{7}{4} \end{cases}$$



$$f(t) = \begin{cases} t + 14, & t < \frac{7}{4} \\ 17 - 4t, & t \geq \frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

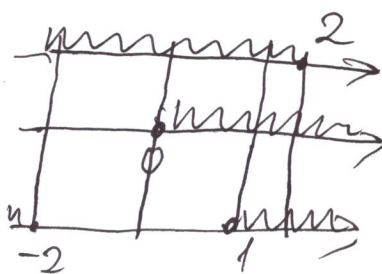
и на каждом интервале
функция линейная, а значит она непрерывная
и возрастающая $\Rightarrow f(t_1) \leq f(t_2)$ - неравенство,
замещенное через функцию.

т.е. $f(t)$ возрастает, то $f(t_1) \leq f(t_2) \Leftrightarrow t_1 \leq t_2$

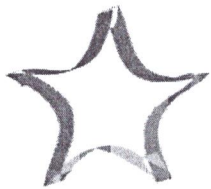
$$\sqrt{2-\log_2 x} \leq \log_2 x \quad g = \log_2 x$$

$$\sqrt{2-g} \leq g$$

$$\begin{cases} 2-g \geq 0 \\ g \geq 0 \\ 2-g \leq g^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g \leq 2 \\ g \geq 0 \\ g^2 + g - 2 \geq 0 \end{cases}$$



$1 \leq g \leq 2$
или $g < -2$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-15

$$1 \leq \log_2 x \leq 2$$

$$\log_2 2 \leq \log_2 x \leq \log_2 4 \quad 2 \leq x \leq 4$$

Ответ: $x \in [2; 4]$
N2

Пусть Белый - 1
серый - 2
чёрный - 3

так как из не жаловы стоят
рядом, то возможно несколько
случаев:

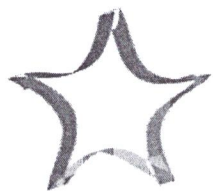
случай а) $\begin{matrix} 123 \\ 232 \\ 323 \end{matrix}$ или $\begin{matrix} 123 \\ 212 \\ 323 \end{matrix}$ и т.д.

случай б) $\begin{matrix} 212 \\ 123 \\ 232 \end{matrix}$ и т.д.

То есть серые и белые (числа 2 на рисунке)
расположены через одну клетку (слоты
рисунка) $\Rightarrow$ в каждом ряду исход серые
цветом заняты $6 \cdot 8 = 48$ мест в исходном
из 2 случаев, а оставшиеся занимают
в произвольном порядке. Это значит,
что Белый или чёрный цвет можно
распределить $2 \cdot 2^{48}$ способами. А всего
способов $3^{12 \cdot 8} = 3^{96}$. Вероятность $= \frac{2 \cdot 2^{48}}{3^{96}} = \left(\frac{2}{9}\right)^{48} \cdot 2$

Ответ: $\left(\frac{2}{9}\right)^{48} \cdot 2$

лист N2



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-15

Дано:

$$R_1 = 10 \text{ Ом}$$

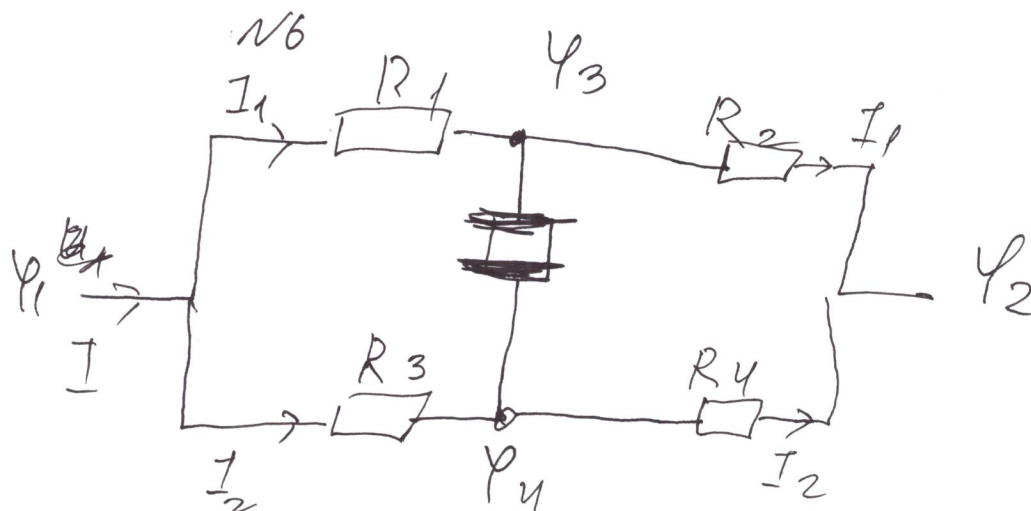
$$R_2 = 20 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 30 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 40 \text{ Ом}$$

$$C = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Ф}$$

$$U = 210 \text{ В}$$



$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{210}{10 + 20} = 7 \text{ А}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_3 + R_4} = \frac{210}{30 + 40} = 3 \text{ А}$$

$$U_1 = I_1 R_1 = 7 \cdot 10 = 70 \text{ В}$$

$$U_3 = I_2 R_3 = 3 \cdot 30 = 90 \text{ В}$$

$$U_1 = \varphi_1 - \varphi_3$$

$$\varphi_3 = \varphi_1 - U_1$$

$$U_3 = \varphi_1 - \varphi_4$$

$$\varphi_4 = \varphi_1 - U_3$$

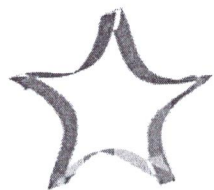
$$\varphi_3 - \varphi_4 = \varphi_1 - U_1 - \varphi_1 + U_3 = U_3 - U_1$$

$$\varphi_4 - \varphi_3 = U_1 - U_3 = 70 - 90 = -20 \text{ В}$$

$$q = C(\varphi_4 - \varphi_3) = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 20 = 40 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$$

Ответ: $120 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$

мсм №3



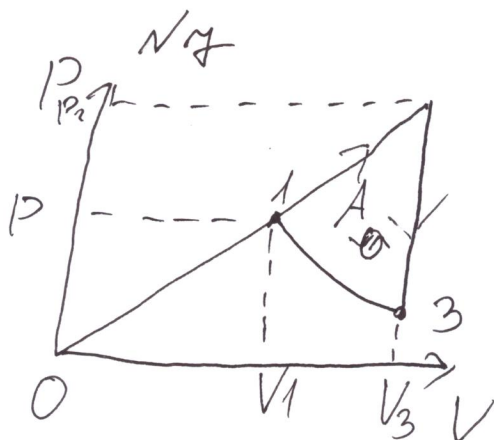
Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-15

Дано:
 $T = \kappa V^2$

$$V_3 = 2V_1$$

$$A_{12} = 2,16 A_{31}$$



$$pV = \nu R T$$

$$pV = \nu R \kappa V^2$$

$$p = \nu R \kappa V$$

$$p = \alpha V (\alpha = \nu R \kappa)$$

$$A_{12} = \frac{p_2 + p_1}{2} (V_3 - V_1)$$

$$A_{12} = \frac{(3p_1 + p_1)}{2} V_1$$

$$A_{12} = \frac{3p_1 V_1}{2}$$

$$A_{23} = 0$$

$$\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2} \quad \left| \quad \frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{2V_1} \right|$$

$$p_2 = 2p_1$$

$$A_{\text{ср}} = A_{12} - |A_{31}| = A_{12} - \frac{A_{12}}{2,16} = A_{12} \left(1 - \frac{1}{2,16} \right) =$$

$$0,537 A_{12}$$

$$Q_1 = Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} > 0$$

$$Q_{23} = \Delta U_{23} < 0$$

$$Q_{31} = A_{31} < 0$$

$$A_{\text{ср}} = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = A_{12} + \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + A_{31} \quad \Delta U_{12} = -\Delta U_{23}$$

$$Q_n = Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} \quad \Delta U_{12} = \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{i}{2} (2p_1 V_1 - p_1 V_1) =$$

$$\frac{i}{2} 3p_1 V_1 = \frac{3i}{2} p_1 V_1 = i A_{12}$$

$$\frac{0,543}{i}$$

для 1 атомного

для 2 атомного газа

$$\eta = \frac{A_{\text{ср}}}{Q_2} = \frac{0,537 A_{12}}{\frac{0,543}{i} A_{12}} = \frac{0,537}{0,543} = 0,989$$

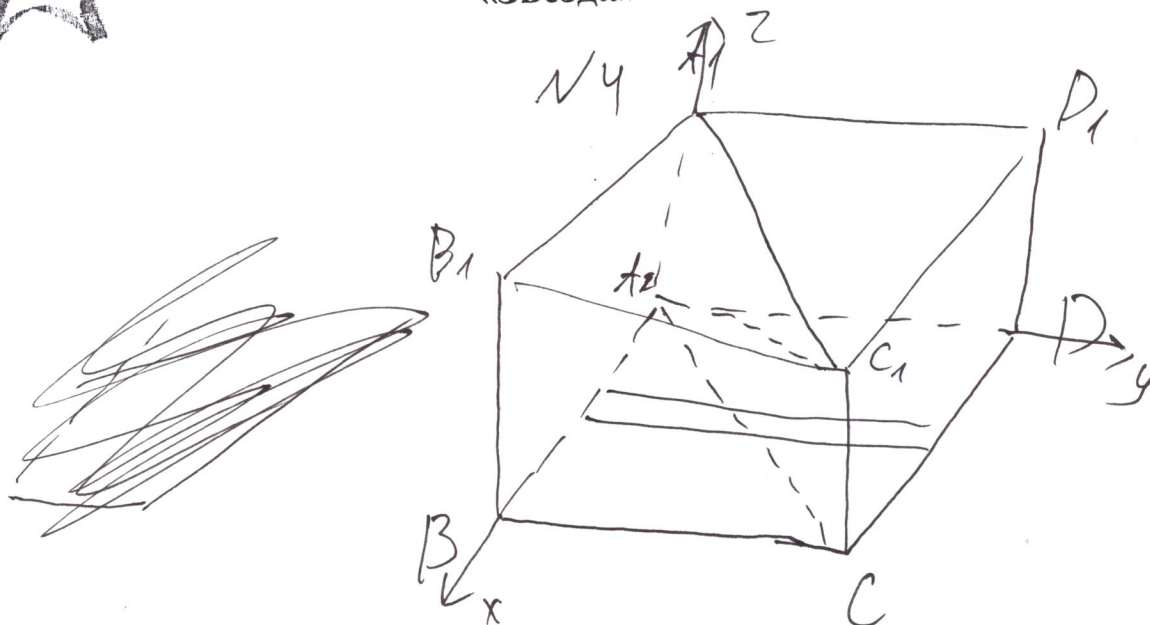
Ответ: 1) 0,19 2) 0,11

мстнч



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-15



$$A C_1 (6; 7; 11)$$

$$\begin{cases} x = 6t \\ y = 7t \\ z = 11t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

- уравнение прямой

если

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq 7t \leq \frac{7}{6}$$

$$0 \leq 11t \leq \frac{11}{6}$$

$\Rightarrow$

$$0 \leq t \leq \frac{1}{6}$$

$$0 \leq y \leq 1 \text{ и } 1 \leq y \leq \frac{7}{6}$$

$$0 \leq t \leq \frac{11}{7} \text{ и } \frac{11}{7} \leq y \leq \frac{11}{6}$$

2 отрезка + 1 угол.

если

$$1 \leq x \leq 2$$

$$\frac{1}{6} \leq t \leq \frac{2}{6}$$

$$\frac{7}{6} \leq 7t \leq \frac{14}{6}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{7}{6} \leq y \leq 2 \text{ и } 2 \leq y \leq \frac{14}{6}$$

$$\frac{11}{6} \leq z \leq \frac{22}{7} \text{ и } \frac{23}{7} \leq y \leq \frac{22}{6}$$

2 угла и 1 угол.

если

$$2 \leq x \leq 3$$

$$\frac{2}{6} \leq t \leq \frac{3}{6}$$

$$\frac{14}{6} \leq 7t \leq \frac{21}{6}$$

$$\frac{14}{6} \leq y \leq 3 \text{ и } 3 \leq y \leq \frac{21}{6}$$

$$\frac{22}{6} \leq z \leq \frac{33}{7} \text{ и } \frac{33}{7} \leq z \leq \frac{33}{6}$$

2 угла + 1 угол

итого



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-15

если

$$\begin{aligned} 3 \leq x \leq 4 \\ \frac{3}{6} \leq t \leq \frac{4}{6} \\ \frac{21}{6} \leq 7t \leq \frac{28}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{21}{6} \leq y \leq 4 \text{ и } 4 \leq y \leq \frac{28}{6} \\ \frac{33}{6} \leq z \leq \frac{44}{7} \text{ и } \frac{44}{7} \leq z \leq \frac{44}{6} \\ 2 \text{ усл.} + 2 \text{ усл.} \end{aligned}$$

если $4 \leq x \leq 5$

$$\begin{aligned} \frac{4}{6} \leq t \leq \frac{5}{6} \\ \frac{28}{6} \leq 7t \leq \frac{35}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{28}{6} \leq y \leq 5 \text{ и } 5 \leq y \leq \frac{35}{6} \\ \frac{44}{6} \leq z \leq \frac{55}{7} \text{ и } \frac{55}{7} \leq z \leq \frac{55}{6} \\ 1 \text{ усл.} + 2 \text{ усл.} \end{aligned}$$

если $5 \leq x \leq 6$

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} \leq t \leq 1 \\ \frac{55}{6} \leq 7t \leq 7 \\ \frac{55}{6} \leq 11t \leq 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 356 \leq y \leq 17 \\ \frac{55}{6} \leq z \leq 11 \text{ 2 усл.} \end{aligned}$$

ответ: 20 усл. бинов

№ 3

$$F(x) = ax^2 + (a+1)x + b \geq 0 \text{ найдем, знач. } 2a+b+1 \text{ при всех } x \in \mathbb{R}$$

1 случай) $a = 0$ $F(x) = x + b$ — линейная функция $\Rightarrow$ при $x \in \mathbb{R}$ принимает отриц. знач. $\Rightarrow$ 1 случай не подходит.

2 случай) $a \neq 0$

а) $a < 0$ при $a < 0$ функция принимает отриц. значения при $x \rightarrow \pm \infty \Rightarrow$ случай не подходит. Мат №



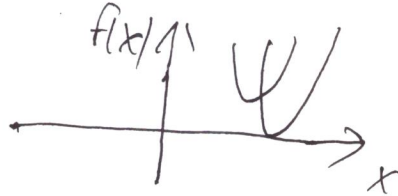


Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-15

1) $a > 0$

$\begin{cases} D \leq 00 \\ a > 0 \end{cases}$ необходимые
условия



$$D = (a+1)^2 - 4ab = a^2 + 2a + 1 - 4ab = a^2 + 2a(1-2b) + 1$$

Рассмотрим неравенство

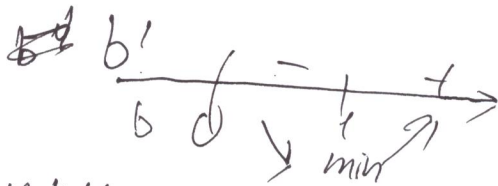
$(a+1)^2 - 4ab \leq 0$ при $a > 0$

$b \geq \frac{(a+1)^2}{4a}$

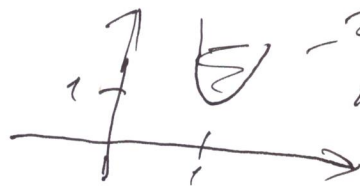
Построим график функции

$b = b(a)$ при $a > 0$

$b = \frac{a^2 + 2a + 1}{4a}$; $b = \frac{a}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4a}$ $b' = \frac{1}{4} - \frac{1}{4a^2} = \frac{a^2 - 1}{4a^2}$; $b' = 0$ при $a = 1$



при $a = 1$ $b = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$

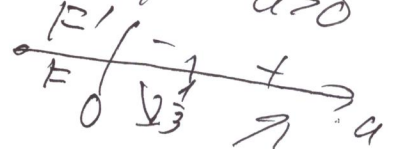


графическое
решение
 $b \geq \frac{(a+1)^2}{4a}$ при $a > 0$

3) Рассмотрим функцию $F = 2a + b + 1$, она принимает наиб. значение на границе области.

$\begin{cases} F = 2a + b + 1 \\ b = \frac{a}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4a} \end{cases} \Rightarrow F = 2a + \frac{a}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4a} + 1 = \frac{9a}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{4a}$
Найдем наиб. знач. при $a > 0$

$F' = \frac{9}{4} - \frac{1}{4a^2} = \frac{9a^2 - 1}{4a^2} = \frac{(3a-1)(3a+1)}{4a^2}$
при $a = \frac{1}{3}$ $F = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{9+18+9}{12} = 3$



Ответ: 3

мсм/м

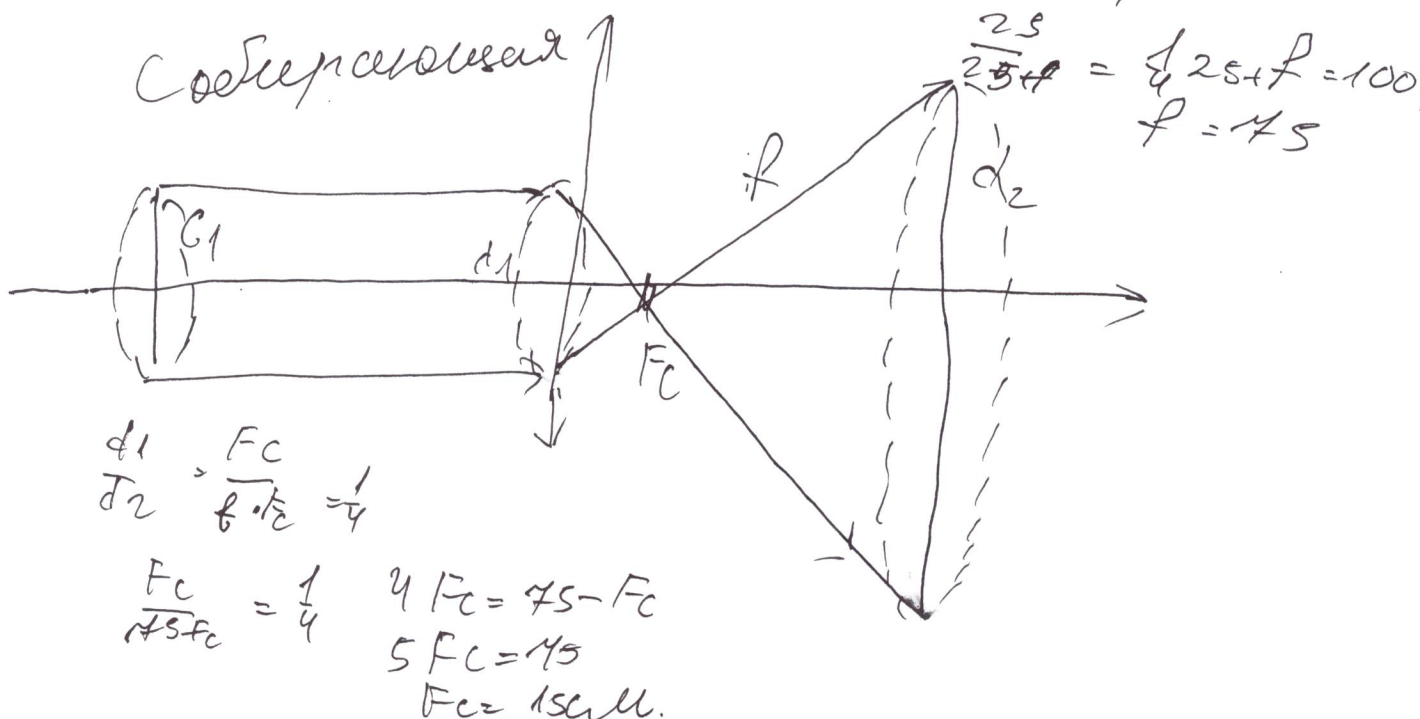
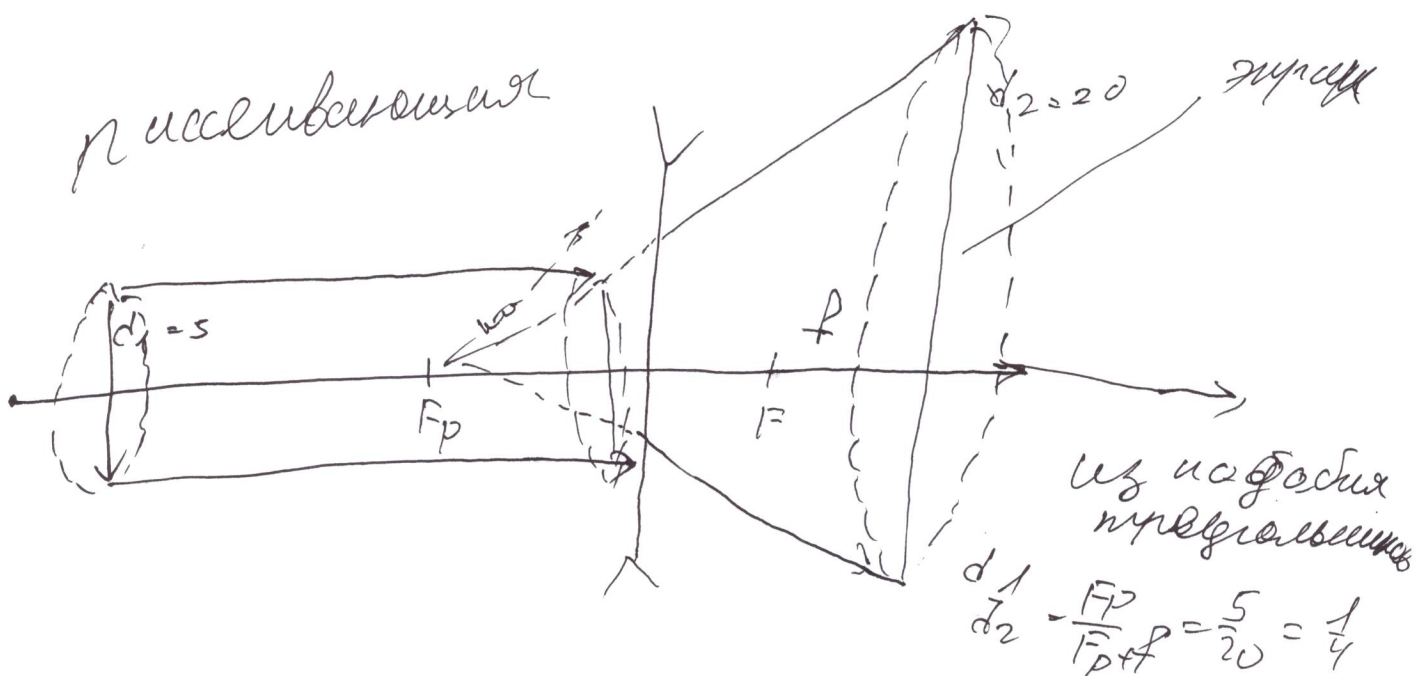


Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-15

№ 8

$f_p = \frac{1}{p_p} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ м}$ — фокусное расc. рассеивающей линзы.



$$D = \frac{1}{0,15} = 6 \text{ дптр.}$$

Ответ: 6 дптр.

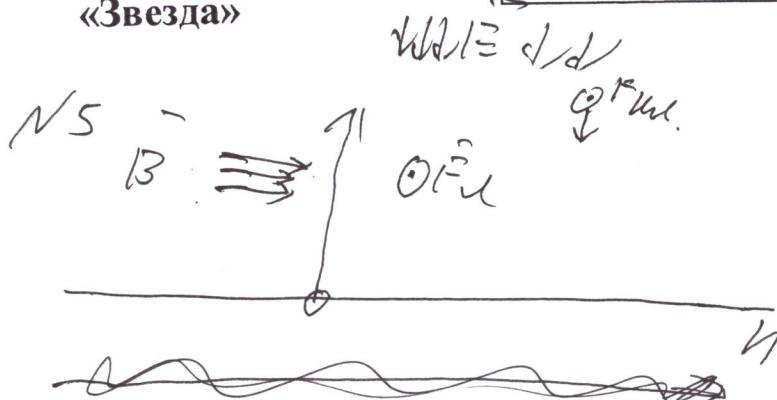
мин № 8



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-15

Дано: m, q
 B, E



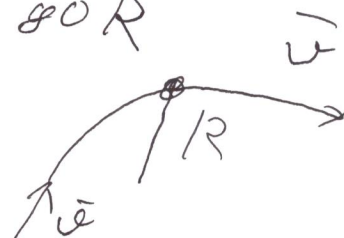
В магнитном поле частица испытывает действие силы Лоренца.

$$F_L = qvB \sin \alpha \quad (\alpha = 90^\circ)$$

сила направлена перпендикулярно скорости, частица движется по окружности.

$qvB = \frac{mv^2}{R}$ и достигает минимальной точки, пройдя $2\pi R$

$$R = \frac{mv^2}{qvB}$$



потом под действием э.п. поля частица движется вниз $F = Eq$ - равноускор. чтобы ~~верн~~ достичь той же высоты надо пройти путь R

$$R = \frac{at^2}{2} \Rightarrow \frac{mv^2}{qvB} = \frac{Eq}{2m} t^2$$

время свиса в э.п. поле

$$t_9 = \sqrt{\frac{mv^2}{qvB} \cdot \frac{2m}{Eq}} = \sqrt{\frac{2m^2 v^2}{q^2 B E}} = \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}}$$

время свиса в магнитном поле.

$$t_m = T = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$t = t_9 + t_m = \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}} + \frac{2\pi m}{qB}$$

ответ: $\frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}} + \frac{2\pi m}{qB}$