



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 63-11-253

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	11	13	10	—	10	10	15	15	84

Вариант 2

$$1. \sqrt{2 - \log_3 x} - 3 | 2 \log_3 x - 5 | \leq \sqrt{2 - \log_3 x} - 5$$

Пусть $\sqrt{2 - \log_3 x} = t$, $t \geq 0$

$$2 - \log_3 x = t^2$$

$$\log_3 x = 2 - t^2$$

$$\sqrt{t - 3 | 2(2 - t^2) - 5 |} \leq \sqrt{2 - t^2} - 3 | 2t - 5 |$$

$$\sqrt{t - 2 + t^2} \leq 3(14 - 2t^2 - 5 - 12t - 5)$$

Найдем нули подмодульных выражений

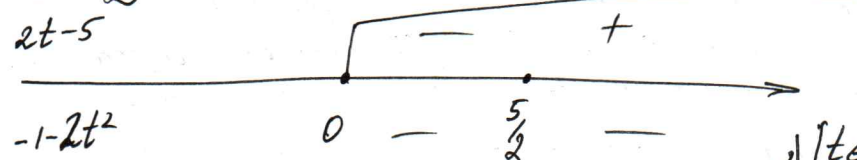
$$-2t^2 - 1 = 0$$

$t^2 = -\frac{1}{2}$ — такое невозможно, при раскрытии с „+“ $t^2 \leq -\frac{1}{2}$, что тоже невозможно.

при раскрытии с „-“ $t^2 > -\frac{1}{2}$, что выполняется при всех $t \in \mathbb{D}(t)$.

$$2t - 5 = 0$$

$$t = \frac{5}{2}$$



$$-1 - 2t^2$$

$$1. \sqrt{t \in [0; \frac{5}{2}]}$$

$$\sqrt{4t^2 + 4t - 14} \leq 3(2t^2 + 1 + 2t - 5)$$

$$4t^2 + 4t - 14 \leq 6t^2 + 6t - 12$$

$$t^2 + t - 2 \leq 0$$

нули:

$$t = -2$$

$$t = 1$$

$$t \in [0; \frac{5}{2}]$$

Решением системы

является промежуток $t \in [0; 1]$

$$2. \sqrt{t \in (\frac{5}{2}; +\infty)}$$

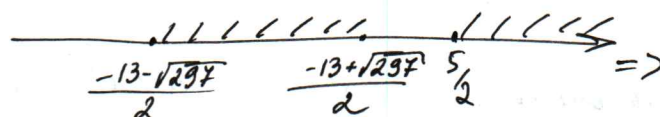
$$\sqrt{4t^2 + 4t - 14} \leq 3(2t^2 + 1 - 2t + 5)$$

$$4t^2 + 4t - 14 \leq 6t^2 - 6t + 18$$

$$t^2 + 13t - 32 \leq 0$$

$$D = 169 + 128 = 297$$

$$\begin{cases} t = \frac{-13 + \sqrt{297}}{2} \\ t = \frac{-13 - \sqrt{297}}{2} \end{cases}$$



$$\frac{5}{2} > \frac{-13 + \sqrt{297}}{2}$$

$$\frac{18}{\sqrt{324}} > \frac{\sqrt{297}}{\sqrt{297}}$$

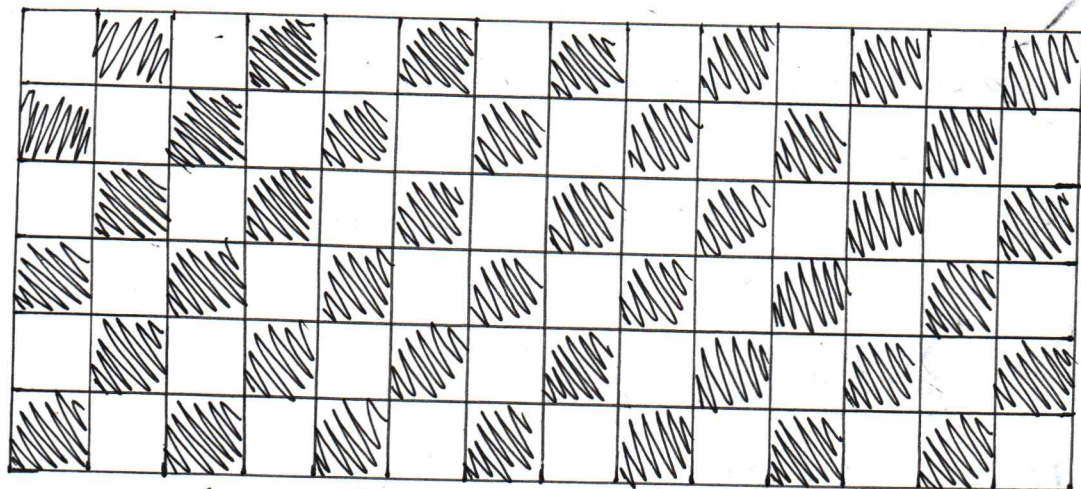
$\Rightarrow$ система не имеет решений.

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2 - \log_3 x} \geq 0 \\ \sqrt{2 - \log_3 x} \leq 1 \end{cases} \begin{cases} 2 - \log_3 x \geq 0 \\ 2 - \log_3 x \leq 1 \\ 2 - \log_3 x \geq -1 \end{cases} \begin{cases} 2 - \log_3 x \geq 0 \\ 2 - \log_3 x \leq 1 \end{cases} \begin{cases} \log_3 x \leq 2 \\ \log_3 x \geq 1 \end{cases} \begin{cases} x \leq 9 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Ответ: $x \in [3, 9]$.

2.



Итак, есть два условия: соседние клетки разного цвета и белый черной не должны быть рядом. Допустим верхняя левая клетка белая. Тогда рядом с ней будут серые. (Для ясности на рисунке будут закрашены только серые. Тогда рядом с ними будут либо черные, либо белые. Следом снова могут быть только серые и т.д. Заметим, что получилась абсолютно симметричная "шахматная доска". А также то, что использование белой или черной краски влияет лишь на количество комбинаций, но не на модель задачи. Кроме того, если бы мы начали с серой клетки (верхней левой), то модель осталась бы той же, с той лишь разницей, что чередование диагональных полос поменялось бы на обратное. Следовательно, можно рассмотреть количество комбинаций в представленной на рисунке и умножить на 2.

Мы гарантированно должны закрасить $6 \cdot 7 = 42$ клетку в серый (один цвет).
Следовательно вероятность этого $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{42}$ * один из трех цветов.

Кроме того мы должны закрасить оставшиеся 42 клетки в один из двух оставшихся цветов. Выбрать их вероятность равна $\frac{2}{3}$
 $\left(\frac{2}{3}\right)^{42}$

То есть, общая вероятность равно произведению этих вероятностей.

$$2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{42} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{42} = \frac{2 \cdot 2^{42}}{3^{84}} = \frac{2^{43}}{3^{84}}$$

Ответ: $\frac{2^{43}}{3^{84}}$



11-16-456

63-11-253

$$3. f(x) = ax^2 + (3a+1)x + b$$

$$4a + b$$

Зададим функцию $g(a) = 4a + b$. Необходимо найти наименьшее $g(a)$. Рассмотрим $f(x)$. По условию $f(x) \geq 0$ при всех x . Следовательно, a не может быть меньше 0. Тогда графиком функции будет парабола с ветвями вниз, уходящими в $-\infty$, условие не выполняется. При $a = 0$ функция приобретает вид $f(x) = x + b$ - графиком будет прямая с $k=1$, а значит область значений $\in (-\infty; +\infty)$, что также не удовлетворяет условию.

$$a > 0$$

b - показывает значение y в точке пересечения графика с OY , следовательно $b \geq 0$.

Найдем (./) вершину

$$x_b = \frac{-(3a+1)}{2a}$$

$$y_b = \frac{a(3a+1)^2}{4a^2} - \frac{(3a+1)^2}{2a} + b = -\frac{(3a+1)^2}{4a} + b$$

$$y_b \geq 0$$

$$b - \frac{(3a+1)^2}{4a} \geq 0$$

$$b \geq \frac{(3a+1)^2}{4a}$$

$$4ab \geq (3a+1)^2$$

$$4a(g(a) - 4a) \geq (3a+1)^2$$

$$4ag(a) - 16a^2 \geq 9a^2 + 6a + 1$$

$$g(a) \geq \frac{25a^2 + 6a + 1}{4a}$$

Наименьшее значение достигается при равенстве.

$$g(a) = \frac{25a^2 + 6a + 1}{4a}$$

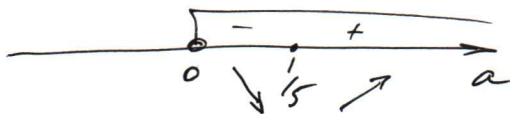
Найдем (./) экстремум

$$g'(a) = \frac{(50a+6) \cdot 4a - 4(25a^2+6a+1)}{16a^2} = \frac{50a^2+6a-25a^2-6a-1}{4a^2} = \frac{25a^2-1}{4a^2}$$

$$g'(a) = 0$$

$$a^2 = \frac{1}{25}$$

$$\begin{cases} a = \pm \frac{1}{5} \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$



$$a = \frac{1}{5} - \text{т. min}$$

Найдем значение $g(a)$ в этой точке

$$g\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{25 \cdot \frac{1}{25} + 6 \cdot \frac{1}{5} + 1}{4 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{2 + \frac{6}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{16 \cdot 5}{5 \cdot 4} = 4$$

Ответ: 4.

6. Дано:

$$C = 500 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$R_1 = 20 \text{ Ом}$$

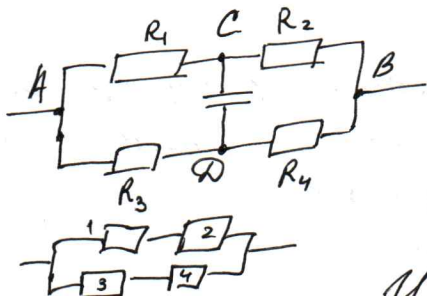
$$R_2 = 10 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 40 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 30 \text{ Ом}$$

$$U_0 = 420 \text{ В}$$

q-?



Т.к. прошло долгое время после подключения источника напряжения к цепи, конденсатор полностью зарядился и можно рассматривать протекание процесса в цепи (2)

$$U_0 = U_{12} = U_{34}$$

$$U_0 = I_0 R_0 \Rightarrow I_0 = \frac{U_0}{R_0}$$

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{34}}$$

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 20 + 10 = 30 \text{ Ом}$$

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 40 + 30 = 70 \text{ Ом}$$

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{30} + \frac{1}{70} \Rightarrow R_0 = \frac{30 \cdot 70}{30 + 70} = \frac{30 \cdot 70}{100} = 21 \text{ Ом}$$

$$I_0 = \frac{420}{21} = 20 \text{ А}$$

$$U_{12} = I_{12} R_{12} \Rightarrow I_{12} = \frac{U_{12}}{R_{12}} = \frac{420}{30} = 14 \text{ А}$$

$$I_{34} = I_0 - I_{12} = 20 - 14 = 6 \text{ А}$$

$$I_1 = I_2 = I_{12}; I_3 = I_4 = I_{34}$$

Найдем напряжение между точками C и D как разность потенциалов

$$U_{AC} = \varphi_C - \varphi_A$$

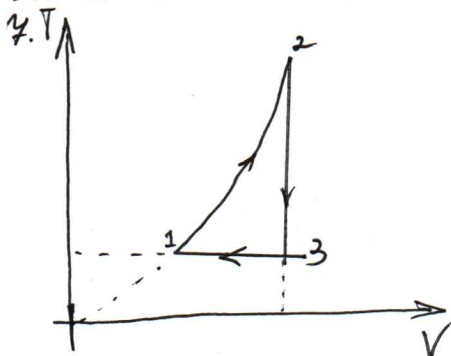
$$U_{AC} = I_1 R_1 = 14 \cdot 20 = 280 \text{ В}$$

$$U_{AD} = \varphi_D - \varphi_A = I_3 R_3 = 6 \cdot 40 = 240 \text{ В}$$

$$U_{CD} = \varphi_C - \varphi_D = U_{AC} - U_{AD} = 280 - 240 = 40 \text{ В}$$

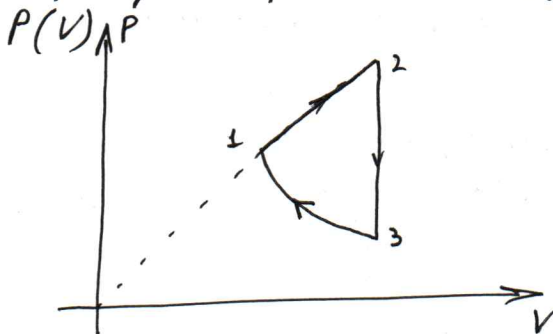
$$q = C U_{CD} = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6} = 20 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} = 20 \text{ нКл}$$

Ответ: $20 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$.



Дано:
 $T = kV^2$
 $V_{\text{max}} = 3V_{\text{min}}$
 $A_{12} = 3,64 \text{ А}_{31}$
 $\eta = ?$

Перестроим график в координатах





11-16-456

163-11-253

Из графика видно, что $V_2 = V_3 \Rightarrow V_1 = V_{\min}; V_2 = V_3 = V_{\max}$

$$V_2 = 3V_1 = V_3$$

$$\text{т.к. } T_{31} = \text{const}$$

$$P_1 V_1 = \text{const}$$

$$P_1 V_1 = P_3 V_3$$

$$P_1 V_1 = 3 P_3 V_1$$

$$P_1 = 3 P_3$$

Для процесса 1-2

$$PV = \text{const}$$

$$PV^k = \text{const}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_1}{3V_1} \Rightarrow P_2 = 3P_1$$

$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{Q_{\text{н}}}$; $A_{\text{пол}}$ за цикл равно площади внутри графика в координатах $P(V)$
или $A_{23} = 0 \Rightarrow A_{\text{пол}} = A_{12} - A_{31} = 3,64 A_{31} - A_{31} = 2,64 A_{31}$.

$$Q_{\text{н}} = Q_{12}$$

$$Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12}$$

$$A_{12} = \frac{P_1 + P_2}{2} (V_2 - V_1) = \frac{4P_1}{2} \cdot 2V_1 = 4P_1 V_1$$

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} \bar{P} R (T_2 - T_1) = \frac{i}{2} (P_2 V_2 - P_1 V_1) = \frac{i}{2} (9P_1 V_1 - P_1 V_1) = 4i P_1 V_1$$

$$\Delta U_{12} = i \cdot A_{12}$$

$$Q_{12} = A_{12} (1 + i) = 3,64 A_{31} (1 + i)$$

$$\eta = \frac{2,64 A_{31}}{3,64 A_{31} (1 + i)} = \frac{2,64}{3,64 (1 + i)}$$

Для одноатомного газа $i = 3$. $\eta = \frac{2,64}{3,64 \cdot 4} = \frac{0,66}{3,64} = \frac{66}{364} = 0,181\%$

$\eta = 18,1\%$
Для двухатомного газа $i = 5$. $\eta = \frac{2,64}{3,64 \cdot 6} = \frac{0,44}{3,64} = \frac{44}{364} = 0,121\%$

$$\eta = 12,1\%$$

Ответ: η машины для одноатомного газа = 18,1%

η машины для двухатомного газа = 12,1%

8. Дано:

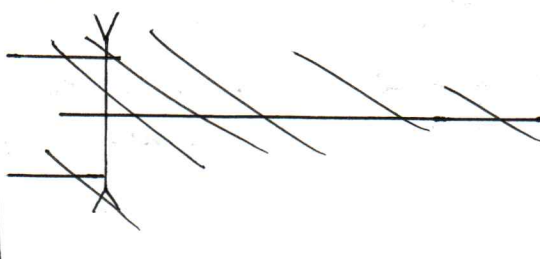
$$D_p = -5 D_{\text{нпр}}$$

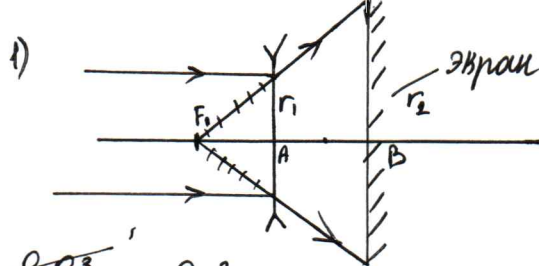
$$d_1 = 0,06 \text{ м}$$

$$d_2 = 0,12 \text{ м}$$

$$D_c = ?$$

Решение:





$$F_1 = \frac{1}{|D_p|} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ м}$$

$$r_1 = \frac{d_1}{2} = 0,03 \text{ м}$$

$$r_2 = \frac{d_2}{2} = 0,06 \text{ м}$$

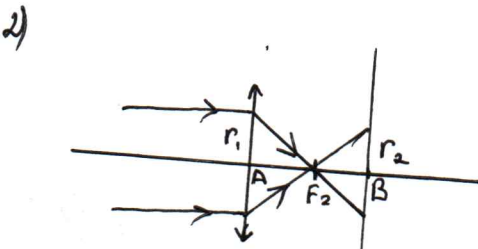
из подобия треугольников.

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{F_1}{F_1 + AB}$$

$$\frac{0,03}{0,06} = \frac{0,2}{0,2 + AB}$$

$$0,4 = 0,2 + AB$$

$$AB = 0,2 \text{ м}$$



из подобия треугольников.

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{F_2}{AB - F_2}$$

$$\frac{0,03}{0,06} = \frac{F_2}{0,2 - F_2}$$

$$2F_2 = 0,2 - F_2$$

$$F_2 = \frac{0,2}{3}$$

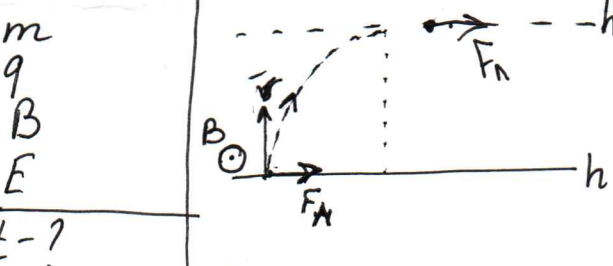
$$\sqrt{\frac{2E}{m \cdot B \cdot B}} =$$

$$D_c = \frac{1}{F_2} = \frac{1,3}{0,2} = 3,5 = 15 \text{ Dmp.}$$

Ответ: 15 Dmp.

5. Дано:

Решение:



$$F_n = Bq v \sin \alpha$$

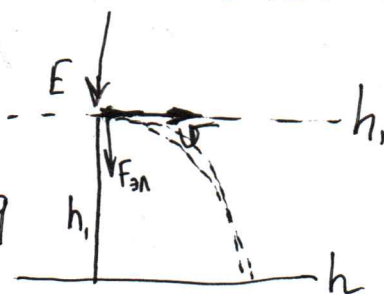
$$F_n = m a_y \quad a_y = \frac{v^2}{R}$$

$$Bq v = \frac{m v^2}{R}$$

$$R = \frac{Bq}{m v} \frac{m v}{Bq}$$

$$\begin{aligned} F_n &= Bq v = m a \\ Bq v &= \frac{E q}{m} \\ v &= \frac{E}{m B} \end{aligned}$$

$R = h_1$, т.к. частица вылетела из магнитного поля в момент наивысшего полета.



$|v| = \text{const}$ для движения в магнитном поле, т.к. по вертикали на тело не действуют силы.

$$F_{эл} = Eq$$

$$F_{эл} = ma$$

$$ma = Eq$$

$$a = \frac{Eq}{m}$$

$$t = t_1 + t_2$$

$$t_1 = \frac{T}{4}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \cdot Bq}{m} \frac{m v}{Bq v} = \frac{2\pi m}{Bq}$$

$$t_1 = \frac{\pi m}{2Bq}$$

У тела за время нахождения в электрическом поле не изменилась скорость, т.к. на него не действовали горизонтальные силы.



11-16-456

163-11-253

Следовательно, по горизонтали скорость была равной к концу во время возвращения в магнитное поле.

Время нахождения в электрическом поле ничтожно мало, поэтому им можно пренебречь.

$$h_1 = \frac{at_2^2}{2} \quad t_2 = \sqrt{\frac{2h_1}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot m v m}{Bq \cdot Eq}} = \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{2Bq} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}} = \frac{m}{q} \left(\frac{\pi}{2B} + \sqrt{\frac{2v}{BE}} \right)$$

Когда частица вновь окажется в магнитном поле на нее снова начнет действовать сила Лоренца, но уже в противоположную сторону и придавать ей ускорение. Но т.к. оно постоянно $a_m = a_n$

$$a = \frac{Eq}{m} \quad ma = BqV \sin \alpha$$

$$a = \frac{BqV}{m}$$

$$\frac{Eq}{m} = \frac{BqV}{m} \Rightarrow V = \frac{E}{B}$$

$$t = \frac{m}{q} \left(\frac{\pi}{2B} + \sqrt{\frac{2E}{BE B}} \right) = \frac{m}{q} \left(\frac{\pi}{2B} + \frac{\sqrt{2}}{B} \right) = \frac{m}{qB} \left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{2} \right)$$

$$\text{Ответ: } \frac{m}{qB} \left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{2} \right)$$