

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 63-11-254

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	9	13	8	3	5	10	10	15	73

Вариант 2

Р1. $7\sqrt{2-\log_3 x} - 3|2\log_3 x - 5| \leq 7\log_3 x - 3|2\sqrt{2-\log_3 x} - 5|$

$$7\sqrt{2-\log_3 x} + 3|2\sqrt{2-\log_3 x}| \leq 7\log_3 x + 3|2\log_3 x - 5|$$

Можно представить в виде ф-ции: $f(\sqrt{2-\log_3 x}) \leq f(\log_3 x)$ (*)

Пусть $\log_3 x = t$, тогда $f(t) = 7t + 3|2t - 5|$, раскроем модуль:

$$f(t) = \begin{cases} 7t + 6t - 15; & t \geq \frac{5}{2} \\ 7t - 6t + 15; & t < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow f(t) = \begin{cases} 13t - 15; & t \geq \frac{5}{2} \\ t + 15; & t < \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

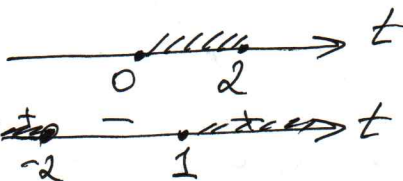
$\Rightarrow f(t)$ монотонно возрастает на $\mathbb{R}$ и $f(t)$ непрерывна $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ решим (*) будет следующее неравенство:

$$\sqrt{2-t} \leq t$$

$$\begin{cases} 2-t \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 2 \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$2-t \leq t^2 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 \geq 0$$



$$\Rightarrow t \in [1; 2]$$

Сделаем обратную замену: $\log_3 x \in [1; 2] \Rightarrow x \in [3; 9]$.

Ответ: $x \in [3; 9]$.

Случай $a < 0$? $a < 0$?

(часть) $\rightarrow$ найдем?

Р3. $f(x) = ax^2 + (3a+1)x + b$

Т.к. по условию ф-ция принимает неотрицательные значения всех $x \Rightarrow a \geq 0$, т.е. парабола ветвями вверх, расположена в I четверти, вершина в I четверти

либо касается Ox в вершине, либо расположена выше Ox .

Значит, надо, чтобы $D \leq 0$. (либо 1 корень, либо корней нет).

$$D = (3a+1)^2 - 4a \cdot b \Rightarrow (3a+1)^2 - 4ab \leq 0; \quad (1)$$

Пусть $c = 3a + b \rightarrow b = c - 3a$; подставим это в (1).

$$\text{нерав-во (1): } (3a+1)^2 - 4a(c-3a) \leq 0$$

$$9a^2 + 6a + 1 - 4ac + 12a^2 \leq 0$$

$$25a^2 + 6a + 1 - 4ac \leq 0$$



11-17-456



OA = OB, т.к. расстояние от мизра до экрана не меняется (OA = OB = 20 см).

Теперь из подобия треугольников (в собирающей линзе):

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{OB - F_2}{F_2} \rightarrow \frac{20}{6} = \frac{OB - F_2}{F_2} \rightarrow$$

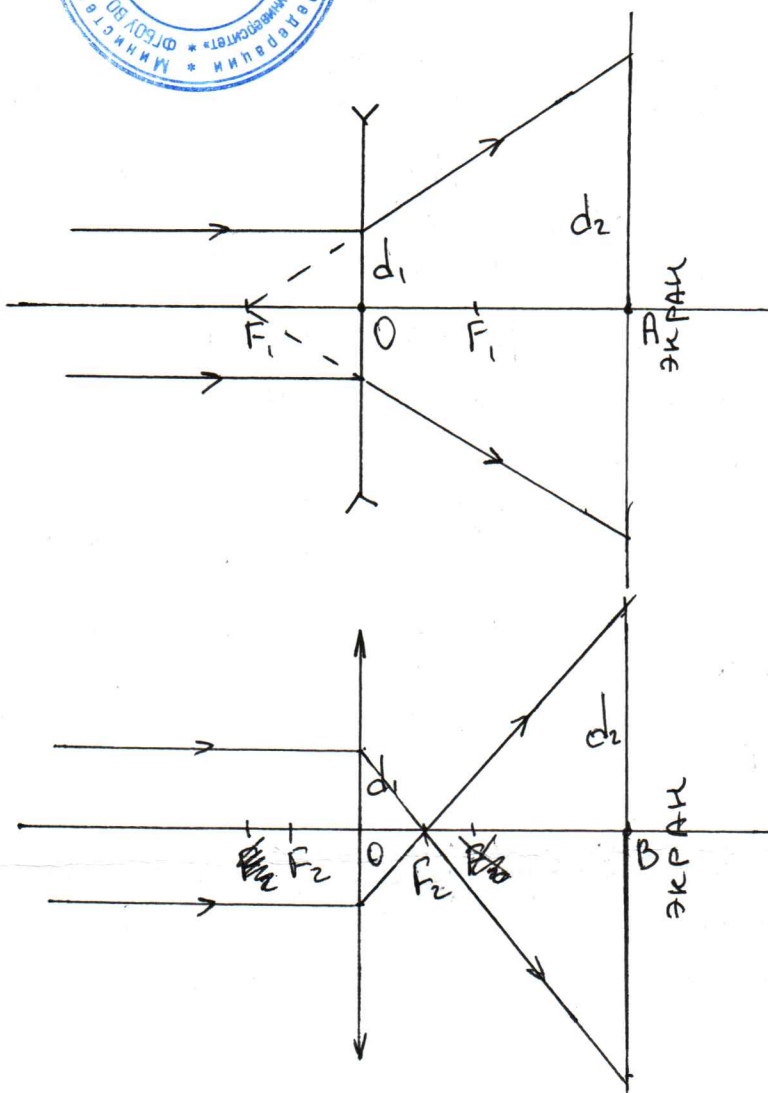
$$\rightarrow 2F_2 = OB - F_2 \rightarrow 3F_2 = OB \rightarrow$$

$$\rightarrow F_2 = \frac{OB}{3} = \frac{20 \text{ см}}{3} = \frac{0,2 \text{ м}}{3};$$

Тогда оптическая сила собирающей линзы

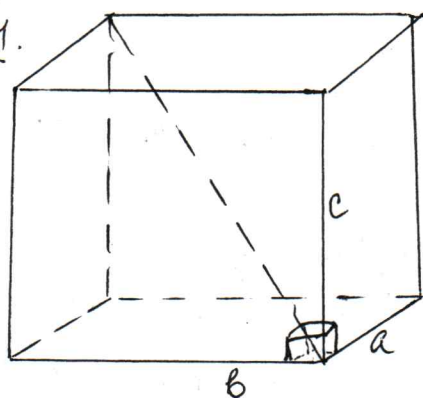
De:

$$D_e = \frac{1}{F_2} = \frac{1,3}{0,2} = \frac{3,10}{2} = 15 \text{ Дптр};$$



Ответ: De = 15 Дптр.

№4.



7x8x13 a = 7; b = 8; c = 13.

Воспользуемся формулой для вычисления протянутых кубиков в трехмерном пространстве;
(K - кол-во протянут. кубиков)
 $K = a + b + c - \text{НОД}(a; b) - \text{НОД}(b; c) - \text{НОД}(a; c) + \text{НОД}(a; b; c); \quad (1)$

$$\text{НОД}(a; b) = \text{НОД}(7; 8) = 1;$$

$$\text{НОД}(b; c) = \text{НОД}(8; 13) = 1;$$

$$\text{НОД}(a; c) = \text{НОД}(7; 13) = 1;$$

$$\text{НОД}(a; b; c) = \text{НОД}(7; 8; 13) = 1;$$

Подставим найденные значения в формулу (1):

$$K = 7 + 8 + 13 - 1 - 1 - 1 + 1 = 28 - 3 + 1 = 26;$$

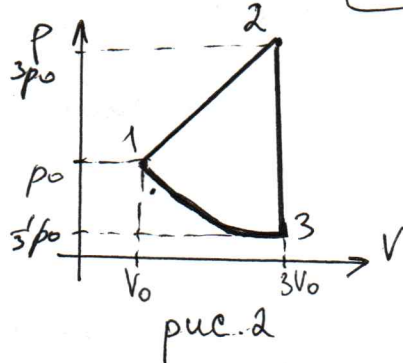
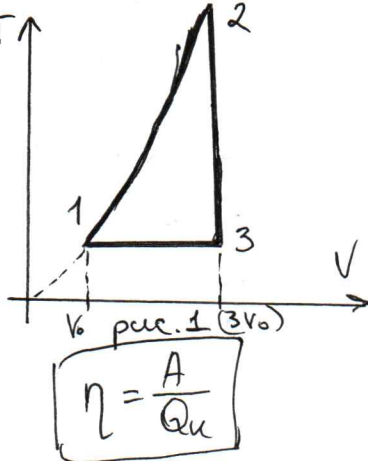


Ответ: 26.

НОД - наибольший общий делитель

№7. процесс T(V) T

1-2: $T = kV^2$
 2-3: $V = \text{const}$
 3-1: $T = \text{const}$
 $V_{\max} = 3V_{\min}$
 $|A_{12}| = 3,64 |A_{31}|$
 $\eta = ?$



$V_{\max} = 3V_{\min}$; пусть $V_{\min} = V_0$,
 пусть из графика: $V_{\min} = V_1 = V_0$.
 Тогда $V_{\max} = 3V_0 = V_2 = V_3$.

Рассмотрим процесс:

1) 1-2: $T = kV^2$, $V_1 = V_0 \Rightarrow T_1 = kV_0^2$;

$T_2 = kV_2^2 = k \cdot (3V_0)^2 = 9kV_0^2$;

Тогда по уравнению Менделеева-Клапейрона:

$\begin{cases} p_1 V_1 = \nu R T_1 \\ p_2 V_2 = \nu R T_2 \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 V_0 = \nu R \cdot kV_0^2 & (1) \\ p_2 3V_0 = \nu R \cdot 9kV_0^2 & (2) \end{cases}$

Разделим (1) на (2):

$\frac{p_1}{3p_2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{3} \Rightarrow p_2 = 3p_1$;

Следовательно, давление в процессе 1-2 возрастает в 3 раза.

2) 2-3: $V_2 = \text{const} \Rightarrow V = \text{const}$. т.к.

Температура, мол р тоже уменьшается.

Пусть, $T_3 = T_1 = kV_0^2$. Значит, в процессе

2-3: $\begin{cases} p_2 V_2 = \nu R T_2 \\ p_3 V_3 = \nu R T_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_2 \cdot 3V_0 = \nu R \cdot k \cdot 9V_0^2 & (3) \\ p_3 \cdot 3V_0 = \nu R \cdot k \cdot V_0^2 & (4) \end{cases}$

Разделим (4) на (3): $\frac{p_3}{p_2} = \frac{1}{9} \Rightarrow p_2 = 9p_3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ в процессе 2-3 давление уменьшается в 9 раз.

3-1: $T = \text{const}$;

$pV = \text{const}$; объем

уменьшается от V_3 до V_1 , т.е. в 3 раза, следовательно, давление возрастает в 3 раза.

и $p_1 = 3p_3$;

4) Пусть $p_1 = p_0$, тогда из п. 1: $p_2 = 3p_0$; $p_3 = \frac{1}{9} p_2 = \frac{1}{9} \cdot 3p_0 = \frac{1}{3} p_0$;

Построим график P-V-координатах (рисунок 2).

5) По уравнению КПД: $\eta = \frac{A}{Q_{12}} = \frac{A_{12} + A_{31}}{Q_{12}}$; $\begin{cases} A_{23} = 0, \text{ т.к. } A = p \Delta V, \text{ а } V_{23} = \text{const}; \\ Q_{12} = Q_{13}, \text{ т.к. } T_{12} = 0, A_{31} < 0, \text{ а } T_{23} = T_1. \end{cases}$

$A_{12} = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) (V_2 - V_1) = \frac{p_0 + 3p_0}{2} (3V_0 - V_0) = 4p_0 V_0$;

~~$A_{31} = p_3 V_3 - p_1 V_1 = \frac{1}{3} p_0 \cdot V_0 - p_0 \cdot V_0 = -\frac{2}{3} p_0 V_0$~~ $A_{31} = p_3 V_3 - p_1 V_1 = \frac{1}{3} p_0 V_0 - p_0 V_0 = -\frac{2}{3} p_0 V_0$ $A_{31} = \frac{A_{12}}{3,64} = \frac{4p_0 V_0}{3,64}$;

$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{i}{2} \nu R (T_2 - T_1) + 4p_0 V_0 = \frac{i}{2} \nu R (9T_0 - T_0) + 4p_0 V_0 = 4i \nu R T_0 + 4p_0 V_0$;

В соответствии с условием, но следует отметить, что для идеального газа $\gamma = 5/2$, следовательно $i = 3$.

Пусть $T_1 = T_3 = T_0 = kV_0^2$. Тогда $T_2 = kV_2^2 = 9kV_0^2 = 9T_0$;

$A_{12} = p \Delta V = \frac{i}{2} \nu R (9T_0 - T_0) = 4i \nu R T_0$; Тогда $Q_{12} = 4i \nu R T_0 + 4p_0 V_0 = 8i \nu R T_0$;

$\eta = \frac{4i \nu R T_0 + \frac{4i \nu R T_0}{3,64}}{8i \nu R T_0} = \frac{4 + \frac{4 \cdot 100}{364 \cdot 9}}{8} = \frac{4 + \frac{100}{91}}{8} = \frac{364 + 100}{91 \cdot 8} = \frac{464}{91 \cdot 8} = \frac{464}{728} = 0,637 = 63,7\%$;

Ответ: $\eta = 63,7\%$.

11.17-456



№2. Всего случайных исходов может быть

63-11-259

$$3^{6 \cdot 14} = 3^{84};$$

Варианты раскраски, которые нам под-
дет по условию, если рассматривать маленький
квадрат из чех клеток:

$\begin{array}{ c c } \hline \delta & \epsilon \\ \hline \epsilon & \delta \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline \delta & \epsilon \\ \hline \epsilon & \epsilon \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline \epsilon & \epsilon \\ \hline \epsilon & \delta \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline \epsilon & \epsilon \\ \hline \epsilon & \epsilon \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c c } \hline \epsilon & \delta \\ \hline \epsilon & \epsilon \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline \epsilon & \delta \\ \hline \delta & \epsilon \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline \epsilon & \delta \\ \hline \epsilon & \epsilon \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline \epsilon & \epsilon \\ \hline \delta & \epsilon \\ \hline \end{array}$

} 8 вариантов

ϵ - серый
 ϵ - серый
 δ - белый

Для благоприят.исходов серые клетки должны идти через
одну и в шахматном порядке, а белые черные между
серыми, и тогда, учитывая, что серые ил. идут ч/з одну
в шахматном порядке, вероятность закрасить так, как
нужно по условию $\frac{8 \cdot 14}{2} = 42$ (т.к. половина клеток -
серые).

При этом исконая вероятность будет равна $P = \frac{N_{\text{благ}}}{N_{\text{общ}}} =$

$$= \frac{2 \cdot 2^{42}}{3^{84}} = \frac{2^{43}}{3^{84}};$$

В конечной ф-ле делим на
2, т.к. 2^{42} - это для одного цвета
(белого или черного), а т.к. начать
мог можем с любого из них, то
и вар-в тогда в 2 раза больше.

Ответ: $P = \frac{2^{43}}{3^{84}}$

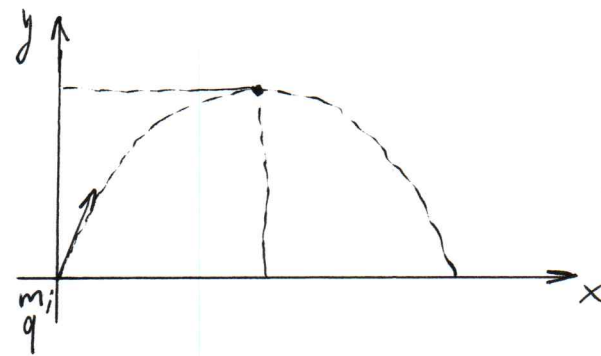


З5.
 $q; (q > 0)$
 $m;$
 $h;$
 $B;$
 $E;$
 $\sin \alpha = 1$
 $\tau = ?$

$$F_n = Bq v \sin \alpha = Bq v;$$

$$F_n = ma, \quad a = \frac{v^2}{R} \Rightarrow Bq v = \frac{mv^2}{R} \rightarrow$$

$$\rightarrow Bq = \frac{mv}{R} \rightarrow R = \frac{mv}{Bq} = h r_i$$



Движ-е ч-ца по горизонтали было ~~равноускорен-~~ равномерное,
а по вертикали - равноускоренным.

В магнитном поле частица двигалась по окру-ти
и прошла $1/4$ часть окружности.