

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

63-11-302
шифр 63-11-302

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	9	13	8	3	10	10	15	15	83

XIV

Вариант 2

III

N1

$$7\sqrt{2-\log_3 x} - 3|2\log_3 x - 5| \leq 7\log_3 x - 3|2\sqrt{2-\log_3 x} - 5|$$

$$7\sqrt{2-\log_3 x} + 3|2\sqrt{2-\log_3 x} - 5| \leq 7\log_3 x + 3|2\log_3 x - 5|.$$

003

(*) $f(\sqrt{2-\log_3 x}) \leq f(\log_3 x)$, где $f(a) = 7a + 3|2a - 5|$.

$$f(a) = \begin{cases} 7a + 6a - 15, & a \geq \frac{5}{2} \\ 7a - 6a + 15, & a < \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$f(a) = \begin{cases} 13a - 15, & a \geq \frac{5}{2} \\ a + 15, & a < \frac{5}{2} \end{cases}$$

$f(a) \nearrow$ на $x \in (-\infty; +\infty)$, непрерывна $\Rightarrow$ аргумент меньше тогда, когда меньше функция.

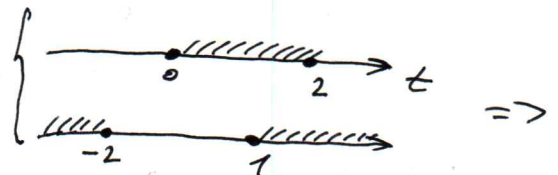
Неравенство * эквивалентно неравенству:

$$\sqrt{2-\log_3 x} \leq \log_3 x$$

введём замену $\log_3 x = t$.

$$\sqrt{2-t} \leq t$$

$$\begin{cases} 2-t \geq 0 \\ t \geq 0. \\ 2-t \leq t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \leq 2 \\ t \geq 0. \\ t^2 + t - 2 \geq 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow 1 \leq t \leq 2$$

$$1 \leq \log_3 x \leq 2.$$

$$3 \leq x \leq 9.$$

Ответ: $x \in [3; 9]$.

N3 $f(x) = ax^2 + (3a+1)x + b$

$f(x) \geq 0$ на $(-\infty; +\infty)$ $4a+b = ?$ найти.

$$f(x) \geq 0 \text{ на } (-\infty; +\infty) \Rightarrow a > 0, D \leq 0.$$

$$D = (3a+1)^2 - 4ab \leq 0.$$

Пусть $4a+b = m$, тогда $b = m - 4a$.

$a=0, a < 0?$

$$(3a+1)^2 - 4a(m-4a) \leq 0.$$

$$9a^2 + 6a + 1 - 4am + 16a^2 \leq 0.$$

$$25a^2 + 2a(3-2m) + 1 \leq 0$$

$$2a(3-2m) \leq -25a^2 - 1.$$

$$3-2m \leq \frac{-25a^2-1}{2a} \quad (\text{знак пер-ва не меняется, т.к. } a > 0)$$

$$2m-3 \geq \frac{25a^2+1}{2a}.$$

$$2m \geq \frac{25a^2+1+6a}{2a}.$$

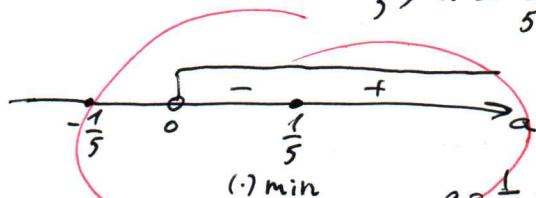
$$m \geq \frac{25a^2+6a+1}{4a} \Rightarrow \text{наименьш. зн. будет достигаться при } m = \frac{25a^2+6a+1}{4a}$$

Найдем ~~наименьшее~~ ^{наименьшее} зн-ние ф-ции $f(a) = \frac{25a^2+6a+1}{4a}$ при $a > 0$.

$$f'(a) = \frac{(50a+6) \cdot 4a - 4 \cdot (25a^2+6a+1)}{16a^2} = \frac{(50a+6)a - (25a^2+6a+1)}{4a^2} =$$

$$= \frac{50a^2+6a-25a^2-6a-1}{4a^2} = \frac{25a^2-1}{4a^2}$$

$$f'(a) = 0 \quad \text{при} \quad a = \frac{1}{5}; \quad a = -\frac{1}{5}$$



(-) min

$$a = \frac{1}{5} \text{ — (-) min} \Rightarrow$$

Оушка, +

б-?

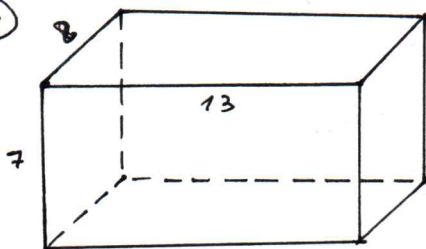
когда достиг.

$\Rightarrow$ Наим. зн-ние $f(a)$ при $a > 0$ достиг-ся при $a = \frac{1}{5}$.

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{25}{25} + \frac{6}{5} + 1}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{16}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow m_{\text{наим}} = 4.$$

Ответ: 4

(N4)



Кол-во единиц кубиков, которые пропущены или по большей диагонали паралле-да, можно вычислить по формуле:

$$a+b+c - \text{НОД}(a,b) - \text{НОД}(b,c) - \text{НОД}(c,a) + \text{НОД}(a,b,c),$$

где a, b, c — стороны паралле-да.

Используя формулу, найдем ответ:

$$\text{НОД}(7,8)=1; \quad \text{НОД}(8,13)=1, \quad \text{НОД}(13,7)=1, \quad \text{НОД}(7,8,13)=1.$$

$$7+8+13 - 1 - 1 - 1 + 1 = 26 - 2 = 26.$$

Ответ: 26

+



№6 Дано:

$$C = 500 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

$$R_1 = 20 \text{ Ом.}$$

$$R_2 = 10 \text{ Ом.}$$

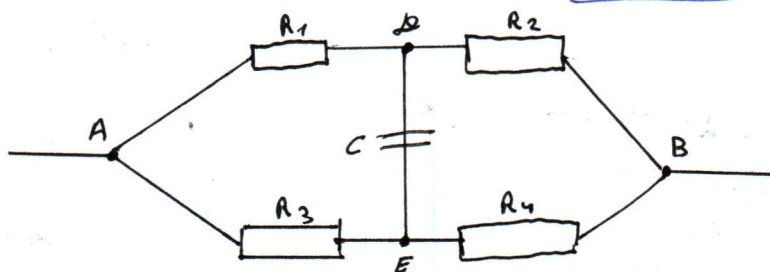
$$R_3 = 40 \text{ Ом.}$$

$$R_4 = 30 \text{ Ом.}$$

$$U_0 = 420 \text{ В.}$$

11-74-456

163-11-302



Найти: q - ?

Решение:

Через достаточно большой промежуток времени конденсатор полностью зарядится. Ток через него не пойдет и пойдет только $7/8$ резисторов.

R_1, R_2 и R_3, R_4 соединены $\parallel \Rightarrow U_{12} = U_{34} = U_0$.

R_1, R_2, R_3, R_4 сог. поперечному $\Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{12}, \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_{34}$, а также $R_{12} = R_1 + R_2, R_{34} = R_3 + R_4$.

$$\gamma_1 = \gamma_{12} = \frac{U_{12}}{R_{12}} = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{420}{20 + 10} = 14 \text{ А.}$$

$$\gamma_3 = \gamma_{34} = \frac{U_{34}}{R_{34}} = \frac{U_0}{R_3 + R_4} = \frac{420}{40 + 30} = 6 \text{ А.}$$

$$\begin{cases} \varphi_A - \varphi_D = U_1 = \gamma_1 R_1 = 14 \cdot 20 = 280 \text{ В} & (1) \\ \varphi_A - \varphi_E = U_3 = \gamma_3 R_3 = 6 \cdot 40 = 240 \text{ В} & (2) \end{cases}$$

вычтем из (1) - (2):

$$\varphi_E - \varphi_D = 280 - 240 = 40 \text{ В} = U_C$$

$$q = C \cdot U_C = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Кл} = 20 \text{ мкКл.}$$

Ответ: 20 мкКл.

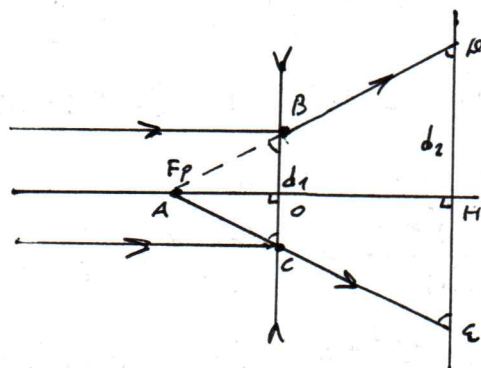
№8 Дано:

$$D_P = -5 \text{ диоптр.}$$

$$d_1 = 6 \text{ см}$$

$$d_2 = 12 \text{ см}$$

$$D_C = ?$$



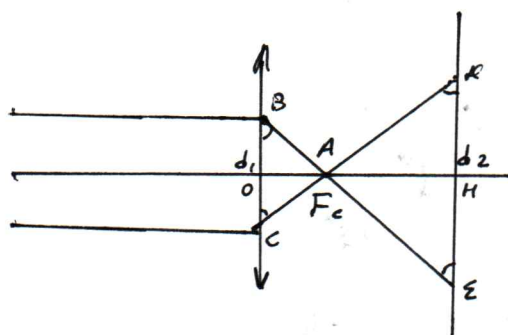
$$F_P = \left| \frac{1}{D_P} \right| = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ м} = 20 \text{ см.}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle APE \text{ (по 2 \angle)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d_2}{d_1} = \frac{F_P + OH}{F_P} = \frac{12}{6} = 2.$$

$$F_P + OH = 2F_P.$$

$$OH = F_P = 20 \text{ см.}$$



$$\triangle ABC \sim \triangle APE \text{ (по 2 \angle)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d_2}{d_1} = \frac{OH - F_C}{F_C} = \frac{12}{6} = 2.$$

$$OH - F_C = 2F_C$$

$$OH = 3F_C$$

$$F_C = \frac{OH}{3} = \frac{20}{3} \text{ см.} = \frac{0,2}{3} \text{ м.}$$

$$D_c = \frac{1}{F_c} = \frac{1}{0,067} = \frac{3}{0,2} = 15 \text{ Rmp.}$$

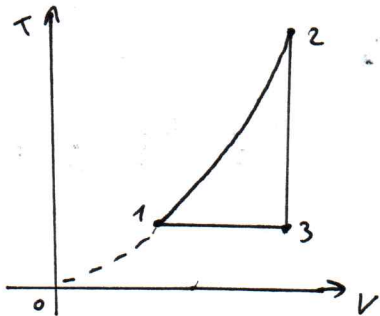
Problem: 15 Rmp.

⑦ 1-2: $T = kV^2$

$$\frac{V_{\max}}{V_{\min}} = 3$$

$$A_{12} = 3,64 \cdot A_{31}$$

η - ?



$$\eta = \frac{A}{Q_H}$$

процесс 1-2: $pV = \nu RT$
 $T = kV^2 \Rightarrow pV = \nu R k V^2$
 $p = \nu R k V \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{p}{V} = \nu R k = \text{const.}$$

$$V_{\max} = V_2 = V_3$$

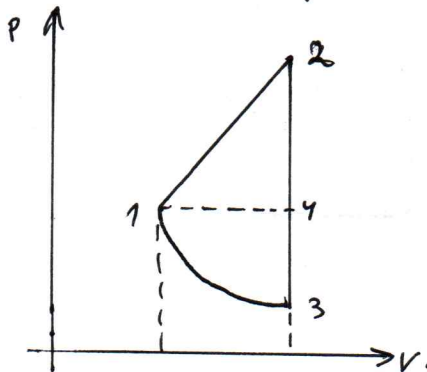
$$V_{\min} = V_1$$

$$\frac{p_2}{V_2} = \frac{p_1}{V_1} \Rightarrow p_2 = \frac{p_1 \cdot V_2}{V_1} = \frac{p_1 \cdot 3V_1}{V_1} = 3p_1.$$

процесс 1-3: $T = \text{const} \Rightarrow p_3 V_3 = p_1 V_1$

$$p_3 = \frac{p_1 V_1}{V_3} = \frac{p_1 V_1}{3V_1} = \frac{p_1}{3}.$$

напишем график $p(V)$:



$$A = A_{1241} + A_{1431}$$

$$A_{1241} = \frac{1}{2} (p_2 - p_1) (V_2 - V_1) = \frac{1}{2} (3p_1 - p_1) (3V_1 - V_1) = \frac{1}{2} \cdot 2p_1 \cdot 2V_1 = 2p_1 V_1$$

процесс 1-3. Угнетательный процесс $\Rightarrow$

$$\Rightarrow A_{1431} = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln 3$$

$$A = 2p_1 V_1 + p_1 V_1 \ln 3 = (2 + \ln 3) p_1 V_1$$

$$A_{1431} = p_1 (V_2 - V_1) - A_{31} =$$

$$= 2p_1 V_1 - \frac{4p_1 V_1}{3,64} \approx$$

$$\approx (2 - 1,1) p_1 V_1 = 0,9 p_1 V_1$$

$$A = A_{1241} + A_{1431} =$$

$$= 2p_1 V_1 + 0,9 p_1 V_1 = 2,9 p_1 V_1$$

$$Q_H = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}.$$

$$A_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot (V_2 - V_1) = \frac{p_1 + 3p_1}{2} (3V_1 - V_1) = \frac{4p_1}{2} \cdot 2V_1 = 4p_1 V_1.$$

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{3}{2} (9p_1 V_1 - p_1 V_1) = \frac{3 \cdot 8}{2} p_1 V_1 = 12 p_1 V_1.$$

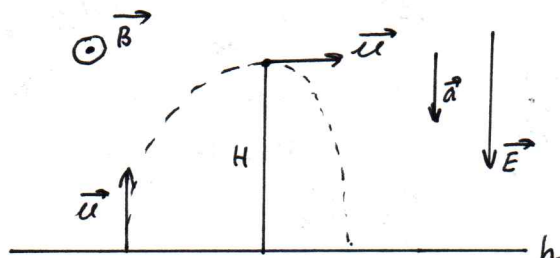
$$Q_H = 4p_1 V_1 + 12p_1 V_1 = 16p_1 V_1$$

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{(2 + \ln 3) p_1 V_1}{16 p_1 V_1} = \frac{2 + \ln 3}{16} \approx \frac{2 + 1,1}{16} = \frac{3,1}{16} = 0,19375 \approx 19,4\%$$

$$\eta \approx 0,181 = 18,1\%$$

Problem: 18,1%.

⑤ m, q
~~h~~
 B
 E
 t - ?





№5 (продолжение).

11-14-456

163-11-302

- 1) Вектор магн. индукции в магн. поле $\perp$ скорости частицы $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ частица движ-ся по окружности:

$$\left. \begin{aligned} F_n &= \vec{v} \times \vec{B} q \\ F_n &= m a_y \\ a_y &= \frac{v^2}{R} \end{aligned} \right| \Rightarrow \frac{m v^2}{R} = B q v \Rightarrow R = \frac{m v}{B q} \left| \Rightarrow H = \frac{m v}{B q} \right.$$

- В верхней (1) параллельно скорости частицы будет направл. горизонтально
 $\Rightarrow$ она пройдет четверть окр-ны за четверть периода.

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi H}{v} = \frac{2\pi}{v} \cdot \frac{m v}{B q} = \frac{2\pi m}{B q}$$

$$t_1 = \frac{1}{4} T = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi m}{B q} = \frac{\pi m}{2 B q}$$

- 2) в т. поле частица будет движ-ся равноускоренно вниз:

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{a t_2^2}{2} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2H}{a}} \\ a &= \frac{F}{m} \left| \Rightarrow a = \frac{Eq}{m} \right. \end{aligned} \right| \Rightarrow t_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{m v}{B q} \cdot \frac{m}{Eq}} = \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2 v}{B E}}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{2 B q} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2 v}{B E}}$$

ответ: $\frac{\pi m}{2 B q} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2 v}{B E}}$

- №2. Всего может быть два сигнала:

1)

с		с		с		с		с	
	с		с		с		с		с
с		с		с		с		с	
	с		с		с		с		с
с		с		с		с		с	
	с		с		с		с		с

2)

	с		с		с		с		с
с		с		с		с		с	
	с		с		с		с		с
с		с		с		с		с	
	с		с		с		с		с
с		с		с		с		с	

где с - серые илени, а все остальные либо белые, либо черные.

Всего белых/черных иленик $\frac{6 \cdot 14}{2} = 42$, вариантов цветов на них - 2.

Значит, ~~вариантов~~ $\exists 2^{42}$ ~~независимых~~ подходящих комбинаций в настраив. ^{сигнале}

Всего иленик $6 \cdot 14 = 84$, вариантов цветов на них - 3.

Значит, всего $\exists 3^{84}$ комбинаций в настраив. из сигналов.

но если в настраив. из сигналов вер-но такого набора = $\frac{2^{42}}{3^{84}}$. Кочитывая,
 что max сигналов 2, допнотим еще вер-но на 2: $\frac{2^{42} \cdot 2}{3^{84}} = \frac{2^{43}}{3^{84}}$.

ответ: $\frac{2^{43}}{3^{84}}$