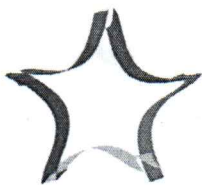


71-18-456



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 63-11-255

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	9	13	10	9	10	10	15	15	86

Вариант 2

11.

$$7\sqrt{2-\log_3 x} - 3 \cdot |2\log_3 x - 5| \leq 7\log_3 x - 3 \cdot |2\sqrt{2-\log_3 x} - 5|$$

$$7\sqrt{2-\log_3 x} + 3 \cdot |2\sqrt{2-\log_3 x} - 5| \leq 7\log_3 x + 3 \cdot |2\log_3 x - 5| \quad (*)$$

Пусть $F(t) = 7t + 3 \cdot |2t - 5|$; тогда неравенство

$$(*) \text{ можно записать в виде } F(\sqrt{2-\log_3 x}) \leq F(\log_3 x) \quad (**)$$

Изследуем го-цню $F(t)$:

$$F(t) = \begin{cases} 7t + 6t - 15, & 2t - 5 \geq 0 \\ 7t - 6t + 15, & 2t - 5 < 0 \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{cases} 13t - 15, & t \geq \frac{5}{2} \\ t + 15, & t < \frac{5}{2} \end{cases}$$

ОДЗ?

$F(t)$ возрастает и непрерывна на всей области определения, значит при увеличении аргумента значение функции возрастает.

Тогда неравенство $(**)$ можно свести к

$$\sqrt{2-\log_3 x} \leq \log_3 x$$

Пусть $\log_3 x = y$, тогда $\sqrt{2-y} \leq y$

$$\begin{cases} 2-y \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2-y \leq y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq 2 \\ y \geq 0 \\ y^2 + y - 2 \geq 0 \end{cases} \quad (**)$$

$$(1) y^2 + y - 2 \geq 0$$

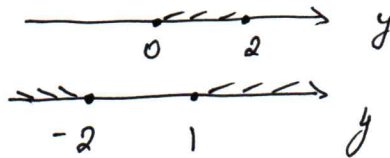
пусть: $\begin{cases} y = -2 \\ y = 1 \end{cases}$



$$y \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$$

$$\begin{cases} y \in [0; 2] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty) \end{cases}$$



$$y \in [1; 2]$$

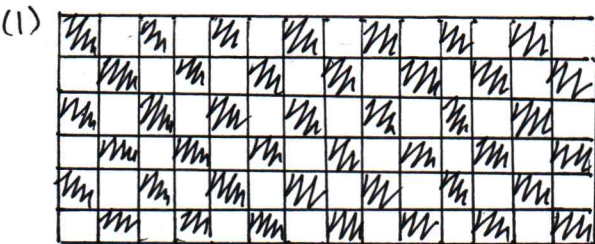
$$\begin{cases} \log_3 x \geq 1 \\ \log_3 x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in [3; 9]$$

Ответ: $x \in [3; 9]$

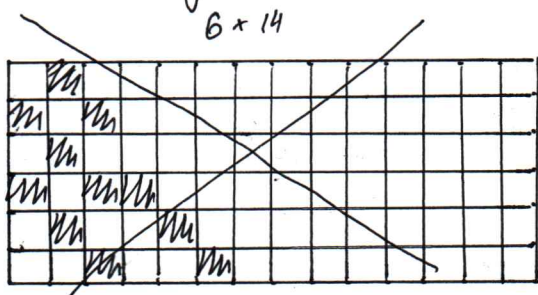
✓ 2. 6×14



3 краски: белая ("б"), серая ("с"), черная ("ч")
соседние клетки должны быть разного цвета, но белая и черная клетки не будут соседними должны быть соседними

$$P = \frac{N_n}{N_b}, \text{ где } N_n - \text{покрывающие варианты}$$

т.е., а N_b - все варианты
всего элементов $6 \cdot 14 = 84$, значит кол-во вариантов закрасить 84
элементы используя три цвета равно 3^{84} ($N_b = 3^{84}$)
Если ^{левую} ~~правую~~ верхнюю клетку закрасить "с", то справа и
снизу от неё должны быть "б" или "ч"
т.е. прямоугольник будет раскрашен как на рисунке (1)
(закрашенные клетки - "с", пустые клетки - "б" или "ч")
Когда для "б" и "ч" краски останется 42 клетки. Кол-во
вариантов закрасить 42 клетки двумя цветами равно
 2^{42} - это и есть кол-во покрывающих вариантов для
первого случая. т.е. $P_1 = \frac{2^{42}}{3^{84}}$

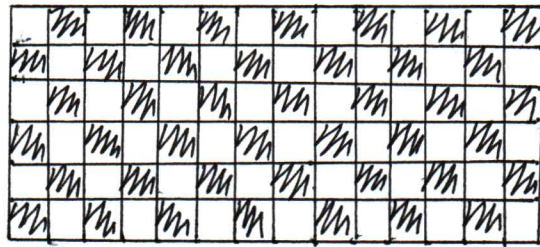


Рассмотрим случай, когда левая верхняя
клетка "б" или "ч", тогда справа и снизу
от неё должна быть "с". т.е. прямоуголь-
ник будет закрашен, как на рисунке (2)
(закрашенные клетки - "с", пустые клетки -
"б" или "ч"). Когда для "б" и "ч" краски
останется 42 клетки.



2 (продолжение)
6 + 14

(2)



Реш-во вариантов
заполнить 42 клетками
фигур цветов равно
 2^{42} - это и есть кол-во
подходящих вариантов
для второго игрока

$$\text{П.о. } P_2 = \frac{2^{42}}{3^{84}}$$

$$P = P_1 + P_2 = \frac{2^{42}}{3^{84}} + \frac{2^{42}}{3^{84}} = \frac{2 \cdot 2^{42}}{3^{84}} = \frac{2^{43}}{3^{84}}$$

Ответ: $\frac{2^{43}}{3^{84}}$

(+)

3.

$F(x) = ax^2 + (3a+1)x + b$ принимает неотриц. значения для
всех x . Значит $a > 0$ (парабола, ветви вверх), т.е. при $a < 0$
график ф-ции - парабола, ветви вниз, значит могут быть
отриц. значения (не урв. усл.), при $a = 0$ график ф-ции -
прямая $x + b$, значит могут быть отриц. значения (не
урв. усл.). Также необходимо условие $D \leq 0$, чтобы парабо-
ла была выше Ox или касалась ей в точке вершины.

$$\begin{cases} a > 0 \\ D \leq 0 \end{cases} \quad D = (3a+1)^2 - 4 \cdot a \cdot b = 9a^2 + 6a + 1 - 4ab \leq 0 \quad (*)$$

Пусть $4a + b = t$, тогда $b = t - 4a$. Подставим в неравенство (*)

$$9a^2 + 6a + 1 - 4a(t - 4a) \leq 0$$

$$9a^2 + 6a + 1 - 4at + 16a^2 \leq 0$$

$$4at \geq 25a^2 + 6a + 1$$

$$t \geq \frac{25a^2 + 6a + 1}{4a}$$

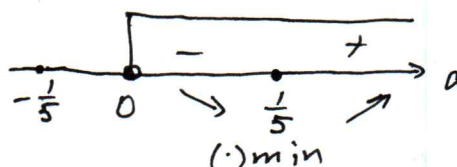
Пусть $g(a) = \frac{25a^2 + 6a + 1}{4a}$

Исследуем $g(a)$ на мин. знач. при $a > 0$

$$g'(a) = \frac{150a + 6 - 4 \cdot (25a^2 + 6a + 1)}{16a^2} = \frac{200a^2 + 24a - 100a^2 - 24a - 4}{16a^2} =$$

$$= \frac{100a^2 - 4}{16a^2} = \frac{4(25a^2 - 1)}{16a^2} = \frac{(5a-1)(5a+1)}{4a^2}$$

$$g'(a) = 0 \quad \frac{(5a-1)(5a+1)}{4a^2} = 0$$



(+)

т.е. $t \rightarrow \min$

Наим. знач. $g(a)$ при $a > 0$ достигается в точке $a = \frac{1}{5}$ и равно

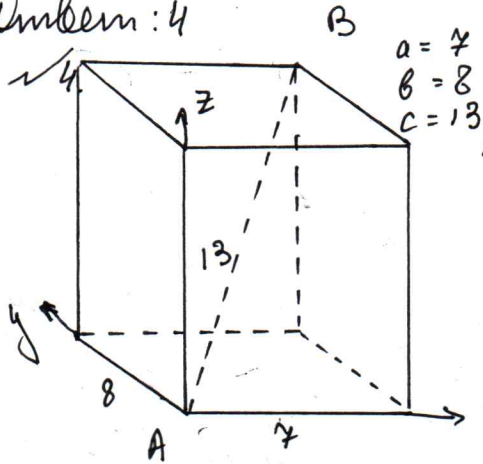
$$g\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{25 \cdot \frac{1}{25} + 6 \cdot \frac{1}{5} + 1}{4 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{6}{5} + 2}{4 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{16}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{16}{5} \cdot \frac{5}{4} = 4$$

И.о. ≥ 4

$4a + b \geq 4$

наим. знач. $4a + b$ равно 4

Ответ: 4



иона проходит из $(\cdot)$ A $(0; 0; 0)$ в $(\cdot)$ B $(7; 8; 13)$ и пересекает 7 плоскостей, перпендикулярных Ox , 8 плоскостей, перпендикулярных Oy и 13 плоскостей, перпендикулярных Oz . Под плоскостями подразумеваются плоскости, образующие грани или единичные кубики. Назовем двойными пересечениями, которые пересекают плоскости по двум осям, а тройными — которые пересекают плоскости по трем осям. Сложив $a + b + c$, мы дважды

учтем двойные пересечения и тройные — тройные. Значит надо вычесть при двойных пересечениях. Так у нас будут правильно учтены двойные пересечения, но тройные пересечения не будут учтены вообще. Значит нужно прибавить одно раз-во тройных пересечений. Так мы узнаем, сколько единичных кубиков проткнула иона.

Количество двойных пересечений: $\text{НОД}(a; b) + \text{НОД}(a; c) + \text{НОД}(b; c) =$

$= \text{НОД}(7; 8) + \text{НОД}(7; 13) + \text{НОД}(8; 13) = 1 + 1 + 1 = 3$



Раз-во тройных пересечений: $\text{НОД}(a; b; c) = \text{НОД}(7; 8; 13) = 1$

Раз-во единичных кубиков, которые проткнула иона:

$a + b + c - \text{НОД}(a; b) - \text{НОД}(a; c) - \text{НОД}(b; c) + \text{НОД}(a; b; c) =$

$= 7 + 8 + 13 - 3 + 1 = 28 - 3 + 1 = 25 + 1 = 26$

Ответ: 26

11-18-456



✓В.

Дано:

$$C = 500 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$R_1 = 20 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 10 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 40 \text{ Ом}$$

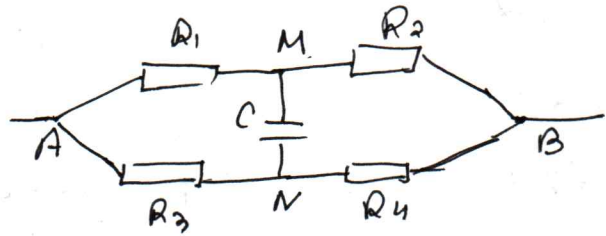
$$R_4 = 30 \text{ Ом}$$

$$U_0 = 240 \text{ В}$$

$$q = ?$$

Решение:

63-11-255



П.к. прошло много времени, но конденсатор полностью зарядится и через него не будет идти ток

$$I_{12} = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{240}{20 + 10} = \frac{240}{30} = 8 \text{ А}$$

$$\varphi_A - \varphi_M = I_{12} \cdot R_1 = 8 \cdot 20 = 160 \text{ В} \quad (1)$$

$$I_{34} = \frac{U_0}{R_3 + R_4} = \frac{240}{40 + 30} = \frac{240}{70} = \frac{24}{7} \text{ А}$$

$$\varphi_A - \varphi_N = I_{34} \cdot R_3 = \frac{24}{7} \cdot 40$$

$$I_{12} = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{240}{20 + 10} = \frac{240}{30} = 8 \text{ А}$$

$$\varphi_A - \varphi_M = I_{12} \cdot R_1 = 8 \cdot 20 = 160 \text{ В} \quad (1)$$

$$I_{34} = \frac{U_0}{R_3 + R_4} = \frac{240}{40 + 30} = \frac{240}{70} = \frac{24}{7} \text{ А}$$

$$\varphi_A - \varphi_N = I_{34} \cdot R_3 = \frac{24}{7} \cdot 40 = 137.14 \text{ В} \quad (2)$$

Вычтем из (2) из (1):

$$\varphi_A - \varphi_M - \varphi_A + \varphi_N = 160 - 137.14$$

$$\varphi_N - \varphi_M = 22.86 \text{ В}$$

$$C = \frac{q}{\varphi_N - \varphi_M} \Rightarrow q = C \cdot (\varphi_N - \varphi_M) = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 22.86 = 11.43 \cdot 10^{-6} =$$

$$= 11.43 \cdot 10^{-6} \text{ Кл} = 11.43 \text{ нКл}$$

Ответ: 11.43 нКл

✓ 2.

Дано:

$$1-2: T = kV^2$$

$$V_3 = V_2 = 3V_1$$

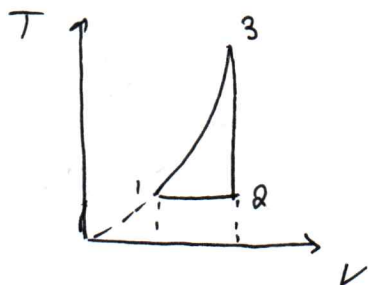
$$A_{12} = 3,64 A_{31}$$

 $\eta = ?$

Решение:

$$\eta = \frac{A}{Q_H}$$

$$PV = \nu RT$$



$$P_1 V_1 = \nu R T_1$$

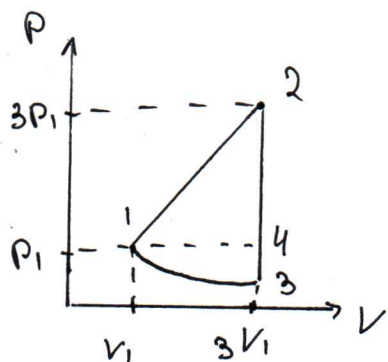
$$P_1 V_1 = \nu R k V_1^2$$

$$P_1 = \nu R k V_1$$

$$P_2 V_2 = \nu R T_2$$

$$P_2 V_2 = \nu R k V_2^2$$

$$P_2 = \nu R k V_2 = \nu R k \cdot 3V_1 = 3P_1$$



$$A = A_{1241} + A_{1431} \quad (\text{площадь за циклом})$$

$$A_{1241} = \frac{1}{2} (3V_1 - V_1) \cdot (3P_1 - P_1) = \frac{1}{2} \cdot 2V_1 \cdot 2P_1 = 2P_1 V_1$$

$$A_{12} = \frac{P_1 + 3P_1}{2} \cdot (3V_1 - V_1) = \frac{4P_1}{2} \cdot 2V_1 = 4P_1 V_1$$

$$A_{1431} = P_1 \cdot (3V_1 - V_1) - A_{31}$$

$$A_{31} = A_{31} = \frac{A_{12}}{3,64} = \frac{4P_1 V_1}{3,64}$$

$$A_{1431} = 2P_1 V_1 - \frac{4P_1 V_1}{3,64} = \frac{7,28P_1 V_1 - 4P_1 V_1}{3,64} = \frac{3,28P_1 V_1}{3,64}$$

$$A = 2P_1 V_1 + \frac{3,28P_1 V_1}{3,64} = \frac{7,28P_1 V_1 + 3,28P_1 V_1}{3,64} = \frac{10,56P_1 V_1}{3,64}$$

$$Q_H = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}$$

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} \nu R (T_2 - T_1) = \frac{i}{2} (P_2 V_2 - P_1 V_1) = \frac{i}{2} (3P_1 \cdot 3V_1 - P_1 V_1) = \frac{i}{2} \cdot 8P_1 V_1 = 4iP_1 V_1$$

$$Q_H = 4iP_1 V_1 + 4P_1 V_1 = 4P_1 V_1 (i+1)$$

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{10,56P_1 V_1}{3,64} : \frac{4P_1 V_1 (i+1)}{1} = \frac{10,56}{3,64 \cdot 4(i+1)} = \frac{10,56}{3,64 \cdot 4(i+1)}$$

$$= \frac{1056}{100} : \frac{364 \cdot 4(i+1)}{100} = \frac{1056}{100} \cdot \frac{100}{364 \cdot 4(i+1)} = \frac{1056}{364 \cdot 4(i+1)}$$

$$= \frac{264}{364(i+1)} = \frac{132}{182(i+1)} = \frac{66}{91(i+1)}$$

$$(1) \text{ если } \eta \text{ задано одновременно, то } i = 3 \quad \eta = \frac{66}{91 \cdot 4} = \frac{33}{182}$$

11-18-456



77 предложение

$$\frac{163-11-255}{66} = \frac{11}{91}$$

(2) если газ 2-х атомный, то $i=5$

$$\eta = \frac{91 \cdot 6}{66} = \frac{66}{637}$$

(3) если газ многоатомный, то $i=6$

$$\eta = \frac{91 \cdot 7}{66} = \frac{66}{637}$$

$$(1) \eta = \frac{33 \cdot 100}{182} \% = \frac{3300}{182} \% = \frac{1650}{91} \%$$

$$(2) \eta = \frac{11 \cdot 100}{91} \% = \frac{1100}{91} \%$$

$$(3) \eta = \frac{66 \cdot 100}{637} \% = \frac{6600}{637} \%$$

Ответ: $\eta = \frac{66}{91 \cdot (i+1)}$

если $i=3$, то $\eta = \frac{1650}{91} \%$

если $i=5$, то $\eta = \frac{1100}{91} \%$

если $i=6$, то $\eta = \frac{6600}{637} \%$

✓ 8.

Дано:

$$D_1 = -5 \text{ Динс}$$

$$d_1 = 6 \text{ см}$$

$$d_2 = 12 \text{ см}$$

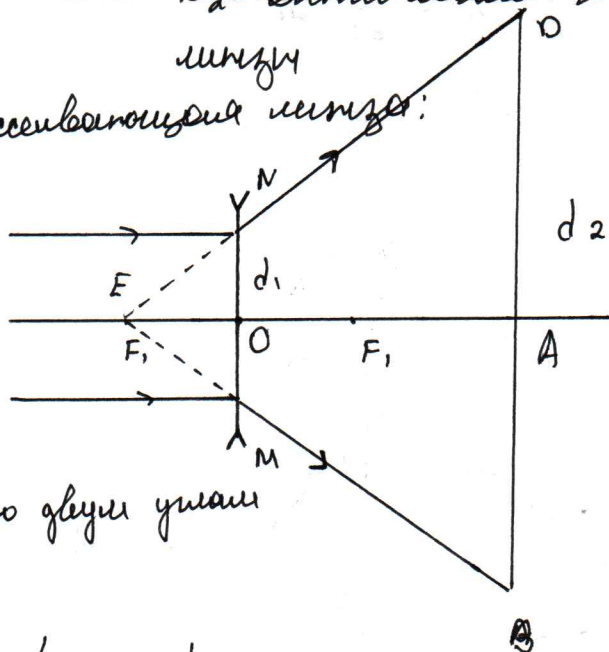
$$D_2 = ?$$

Решение:

D_1 - виртуальная ила рассеивающей линзы

D_2 - виртуальная ила собирающей линзы

1) рассеивающая линза:



$\triangle ME_1N \sim \triangle BE_2D$ по двум углам

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{|F_1| + OA}{|F_1|}$$

$$D = \frac{1}{F} \Rightarrow F_1 = \frac{1}{D_1} = -\frac{1}{5} \text{ м} = -20 \text{ см}$$

$$\frac{12}{6} = \frac{20 + OA}{20}$$

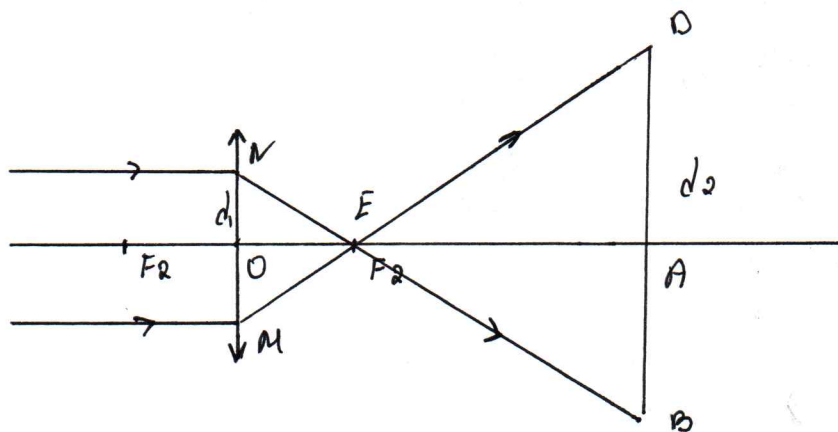
$$6 \cdot OA + 120 = 20 \cdot 12$$

$$6 \cdot OA = 240 - 120$$

$$6 \cdot OA = 120$$

$$OA = 20 \text{ см}$$

2) соответствующая линза:



$\triangle MEN \sim \triangle BED$ по двум углам

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{OA - F_2}{F_2}$$

$$\frac{12}{6} = \frac{20 - F_2}{F_2}$$

$$12F_2 = 120 - 6F_2$$

$$18F_2 = 120$$

$$F_2 = \frac{120}{18} = \frac{20}{3} \text{ см} = \frac{20}{300} \text{ м} = \frac{2}{30} \text{ м}$$

$$D_2 = \frac{1}{F_2} = \frac{1}{\frac{2}{30}} = \frac{30}{2} = 15 \text{ диоптр}$$

Ответ: 15 диоптр.

✓ 5.

Дано:

m, q

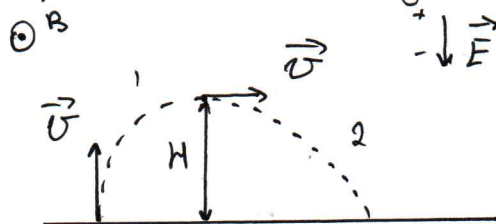
$t=0, h$

B, E

$t' = ?$

Решение:

трем высот h за 0



$$H = R$$

$$t' = t_1 + t_2$$

когда частица влетела в однородное магнитное поле, на неё начинают действовать сила Лоренца, равная $F_L = Bq v$, поэтому траектория движения частицы стала совпадать с окружностью ($F_L = Bq v \sin \alpha$, где $\alpha = 90^\circ$, т.к. v перпендикулярна линиям магнитной индукции $\Rightarrow \sin \alpha = 1$) $\Rightarrow F_L = Bq v$

11-18-456

 $\sqrt{5}$ (предположение)

/63-11-255/

$$F_u = m a_u$$

$$a_u = \frac{v^2}{R}$$

$$Bq \quad v = \frac{m v^2}{R}$$

$$Bq = \frac{m v}{R} \Rightarrow R = \frac{m v}{Bq}$$

$$H = R = \frac{m v}{Bq}$$

время, за которое частица достигла максимальной высоты

$$t_1 = \frac{1}{4} T$$

$$v = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi R}{v}$$

$$t_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi R}{v} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi \cdot m v}{Bq \cdot v} = \frac{2\pi m}{4 Bq} = \frac{\pi m}{2 Bq}$$

когда ~~частица~~ частица оказалась в однородном электрическом поле, на нее начала действовать сила ~~электрического~~ взаимодействия с электрическим полем, направленная вверх (т.к. частица заряжена положительно), равная

$F_{эл} = Eq$, поэтому частица начала двигаться по параболе. Рассмотрим движение частицы как движение тела, брошенного по горизонтали:

$$v_x = v = \cos \alpha$$

$$v_y = a t_2 \quad \text{где } t_2 - \text{время "падения"} \quad (v_y = v_{y0} + a t_2 = a t_2)$$

$$H = v_{y0} t_2 + \frac{a t_2^2}{2}$$

$$H = \frac{a t_2^2}{2}$$

$$F_{эл} = m a$$

$$Eq = m a \Rightarrow a = \frac{Eq}{m}$$

$$H = \frac{Eq t_2^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \frac{m v}{Bq} = \frac{Eq t_2^2}{2m} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{m v \cdot 2m}{Bq \cdot Eq}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m^2 \cdot 2v}{q^2 \cdot B E}} = \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{B E}}$$

Скорость на 1 участке равна начальной скорости на 2 участке, т.к. однородное магнитное поле не меняет кинетической энергии

$$t' = \frac{\pi m}{2 Bq} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{B E}}$$

$$\text{Ответ: } t' = \frac{\pi m}{2 Bq} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{B E}}$$