

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 34-08-07

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	12	13	—	10	10	7	0	64

Вариант 1.

N1.

Пусть x чел — число изначально скидывавшихся студентов;
тогда $(x-2)$ чел — число скидывавшихся в итоге людей;
 xy руб — цена одной калочки; $(y+1000)$ руб — новая сумма вклада калочки;
 $(x-2)(y+1000)$ руб — цена калочки. Таким образом, мы выразим
цену калочки двумя способами. Получаем уравнение:

$$xy = (x-2)(y+1000)$$

$$xy = xy - 2y + 1000x - 2000$$

$$2y = 1000x - 2000$$

$$y = 500x - 1000 = (x-2) \cdot 500.$$

Мы знаем, что цена калочки делится нацело на 1000, а также
 $8000 \text{ руб} \leq \text{цена калочки} \leq 20000 \text{ руб}$, т.е.

$$\begin{cases} 8000 \leq xy \leq 20000 \\ xy : 1000, \text{ значит, } xy = 1000 \cdot a, \text{ где } a \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Если $y = (x-2) \cdot 500$, то $xy = x(x-2) \cdot 500$. ①

$$\begin{cases} 8000 \leq 1000a \leq 20000 \\ xy = 1000a \end{cases} \begin{cases} 8 \leq a \leq 20 \\ ② \\ xy = 1000a \end{cases}$$

из ① и ②: $x(x-2) \cdot 500 = xy = 1000a \quad || : 500$
 $x(x-2) = 2a$

т.к. $a \in \mathbb{N}$, то $2a : 2$, а значит и левая часть делится
на 2, т.е. или x , или $(x-2)$ делится на 2
если $x : 2$, то и $(x-2) : 2$
если $(x-2) : 2$, то и $x : 2$.

Таким образом, оба множителя в левой части делятся на 2, т.е. $x : 2$.

Рассмотрим возможные варианты для x и найдём, при каких x , a удовлетворяет условиям задачи, найденным ранее:
 $a \in \mathbb{N}; 3 \leq x \leq 20. \Rightarrow 4 \leq a \leq 10$

П.к. x - чётно и натурально (ка-во студентов не может быть нечётным), а так же $x > 2$ (т.к. по условию в x есть группа из 2 человек)

если $x=4$, то $a = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4 < 3$ не подходит условию

если $x \geq 6$, то $a \geq \frac{6 \cdot 2}{2} = 6 > 10$ - не подходит.

Таким образом, имеется 1 вариант x . Тогда

$$xy = 4 \cdot 2 \cdot 500$$

если $x=4$, то $a = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4 < 8$ не подходит

если $x=6$, то

$$a = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$$

подходит

если $x \geq 8$, то

$$a \geq \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 > 20$$

не подходит.

И.о., имеется 1 вариант x . Тогда

$$xy = 6 \cdot 4 \cdot 500 = 12000 \text{ руб}$$

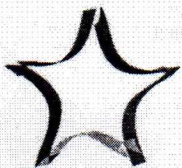
Ответ: 12000 руб.

Р.3. такой вариант действительно подходит:

каждый из 6 человек скидывал по 2000 руб.
тоже того, как 2-й ученик.

каждый из 4-х скидывал по 3000 руб.

$$6 \cdot 2000 = 4 \cdot 3000 = 12000$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

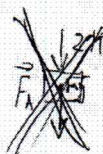
шифр 37-02-07

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1.

№ 7:

Решение:



Дано:

$$F = 2 \text{ Н}$$

$$V_T = 1 \text{ м} = 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$\rho_m = 1000 \text{ кг/м}^3$$

$$g = 10 \text{ Н/кг}$$

$$\rho_T = ?$$

$$F_A = F + m_T \cdot g$$

$$F_A = \rho_m \cdot V_T \cdot g$$

$$F_A = 1000 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = 10 \text{ Н}$$

$$m_T = V_T \cdot \rho_T$$

$$10 = 2 + m_T g$$

$$m_T g = 8 \text{ Н}$$

$$m_T = 0,8 \text{ кг}$$

$$\rho_T = \frac{m_T}{V_T}$$

$$\rho_T = \frac{0,8}{10^{-3}} = 0,8 \cdot 10^3 = 800 \text{ кг/м}^3$$

Ответ: $800 \text{ кг/м}^3 = \rho_{\text{мла.}}$

№ 8.

Решение:

$$N = \frac{Q}{\tau}$$

$$Q = c m \Delta t$$

$$Q = \lambda m; m = \rho V$$

$$N = \frac{c m \Delta t}{\tau} = \frac{4200 \cdot 1000 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 100}{10 \cdot 60} = \frac{8400 \cdot 100}{10 \cdot 60} = \frac{84000}{60} \text{ Вт.}$$

Но в этом случае можно пренебречь передачей
тепла между телами и последующим ее нагреванием, т.к.
 ΔQ в этом случае равно 0.

$$N = \frac{\lambda m + c m_1 \Delta t}{\tau}; m_1 = \frac{N \tau}{\lambda + c \Delta t} = \frac{84000 \cdot 60 \cdot 15 \cdot 60}{330000 + 420000} = 1,68 \text{ кг}$$

Ответ: ~~кг = 0,84 кг~~ $m_1 = 1,68 \text{ кг}$

Дано:

$$V_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$$

$$t_{21} = 0^\circ \text{C}$$

$$t_1 = 10 \cdot 60 \text{ с}$$

$$t_2 = 15 \cdot 60 \text{ с}$$

$$t_{1 \text{ кан}} = 18^\circ \text{C}$$

$$t_{2 \text{ кан}} = 100^\circ \text{C}$$

$$t_{2 \text{ кан}} = 0^\circ \text{C}$$

$$m_{\text{мгд}} = ?$$

№2.

Для того, чтобы максимизировать число, нужно в старшие разряды поставить максимально большие цифры.

Очевидно, что если поставить на первое место 9, то число будет больше, чем если поставить другую цифру.

Чтобы поставить на первое место 9, нужно сделать жоме бы 8 заёркиваний (вотеркнуть все цифры от 1 до 8 включительно).

Чтобы поставить 9 на второе место, нужно жоме бы 19 заёркиваний (с 9 на 1 место).

Чтобы на 3 место - жоме бы 19 заёркиваний на 4 месте, а на 5 место нужно всего жоме бы 64 заёркивания, т.е. этого сделать не получится.

Т.о., мы можем разместить 4 девятки в начале числа.

Если поставить в начало любые другие цифры, то ^{итоговое} число будет меньше ~~нашего~~, т.к. они будут иметь одинаковое кол-во цифр, а в старших разрядах цифры будут меньше.

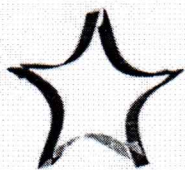
При таком раскладе у нас остаётся ~~то~~ максимум 15 заёркиваний. (4 девятки можно образовать в начале только если сделать $9 + 19 + 19 + 19 = 65$ заёркиваний).

Тогда у нас остаётся 15 заёркиваний и пока число имеет вид:

9999 40414243444546474849 7980.

Нетрудно заметить, что на ^{следующее} место мы можем поставить максимум - 7, используя все 15 ост. заёркиваний. Если мы поставим меньше 7, то итоговое число будет меньше нашего. Т.к. все 80 заёркиваний использованы, то ост. цифры просто переписываемся. Получаем число:

9999 748495051525354555657585960616263646566676869707172
7374757677787980.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 37-08-07

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

N5.

Дано:

$$l_1 = l_2$$

$$R_1 = R_2 = 2\omega = R$$

$$R = 1\text{ м}$$

$$\rho_1 = 2000\text{ кг/м}^3$$

$$\rho_2 = 4000\text{ кг/м}^3$$

$$\frac{m_1}{m_2} = ?$$

Решение:

$$m = V \cdot \rho; \quad V = S \cdot l = \pi \cdot r^2 \cdot l$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(\rho_1 \cdot (\pi \cdot r^2) + (\pi \cdot R^2 - \pi r^2) \cdot \rho_2) \cdot l}{(\rho_2 \cdot (\pi \cdot r^2) + (\pi \cdot R^2 - \pi r^2) \cdot \rho_1) \cdot l} = \frac{\pi (\rho_1 \cdot r^2 + (R^2 - r^2) \rho_2)}{\pi (\rho_2 \cdot r^2 + (R^2 - r^2) \rho_1)} =$$

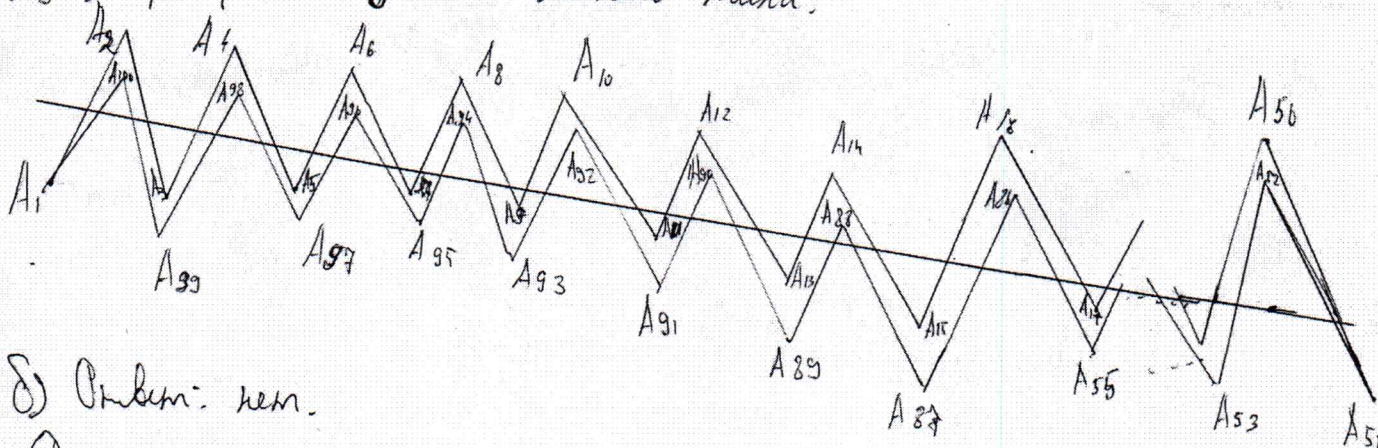
$$= \frac{\rho_1 \cdot r^2 + (R^2 - r^2) \rho_2}{\rho_2 \cdot r^2 + (R^2 - r^2) \rho_1} = \frac{2000 \cdot 1^2 + (2^2 - 1^2) \cdot 4000}{4000 \cdot 1^2 + (2^2 - 1^2) \cdot 2000} = \frac{2000 + 3 \cdot 4000}{4000 + 3 \cdot 2000} =$$

$$= \frac{14000}{10000} = 1,4$$

Ответ: $\frac{m_1}{m_2} = 1,4$.

N3.

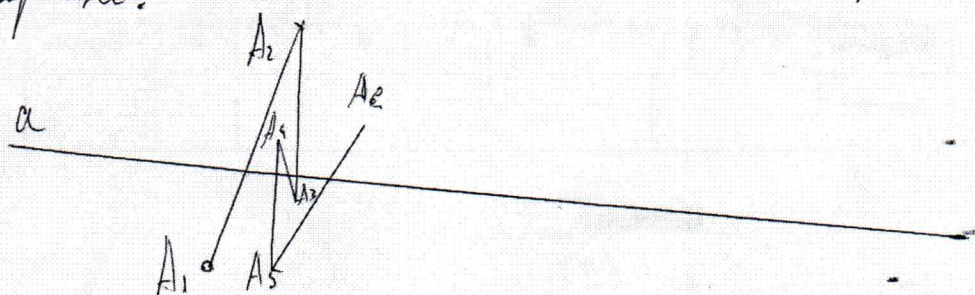
а) да, например многоугольник такого типа:



б) Ответ: нет.

Доказательство: Предположим противное, пусть такой многоугольник существует.
Тогда: Возьмём точку a и отрезок AB , концы которого расположены по разные стороны от прямой A .

Мы хотим построить многоугольник K с 99 сторонами, каждая из которых будет пересекать прямую a не в своей вершине.



Тогда концы ~~каждого~~ ~~этого~~ отрезка будут располагаться в разных полуплоскостях. Получим, что все вершины многоугольника с нечётными индексами будут располагаться в одной полуплоскости, а с чётными индексами — в другой. Но тогда, дойдя до A_{99} , ~~и~~ A_1 и A_{99} обе эти вершины имеют нечётные индексы, а значит, расположатся в ~~одной~~ по одну сторону от прямой a . Но в таком случае отрезок $A_1 A_{99}$ не будет пересекать прямую a , что противоречит условию. Таким образом, предположение неверно и такого многоугольника не существует.