11-09-407

шифр 63-11-09

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	8	10	8	13	10	8	8	15	80

Вариант 1

адание 1

$\sqrt{2-\log_2 x} - 2|4\log_2 x - 7| \leq 9\log_2 x - 2|4\sqrt{2-\log_2 x} - 7|$

$\sqrt{2-\log_2 x} + 2|4\sqrt{2-\log_2 x} - 7| \leq 9\log_2 x + 2|4\log_2 x - 7|$

Легко видно, что правая и левая часть неравенства являются одной и той же функцией $f(t) = 9t + 2|4t - 7|$. Таким образом, получаем, что $f(\sqrt{2-\log_2 x}) = 9\sqrt{2-\log_2 x} + 2|4\sqrt{2-\log_2 x} - 7|$

$f(\log_2 x) = 9\log_2 x + 2|4\log_2 x - 7|$

что соответствует начальному неравенству

Раскроем модуль в $f(t) = 9t + 2|4t - 7|$

$f(t) = \begin{cases} 17t - 14, \text{ при } t \geq \frac{7}{4} \\ t + 14, \text{ при } t < \frac{7}{4} \end{cases}$

Пусть $g(t) = 17t - 14$

Графиком функции $g(x)$ является прямая, при этом $17 > 1 \Rightarrow$ функция $g(x)$ возрастающая

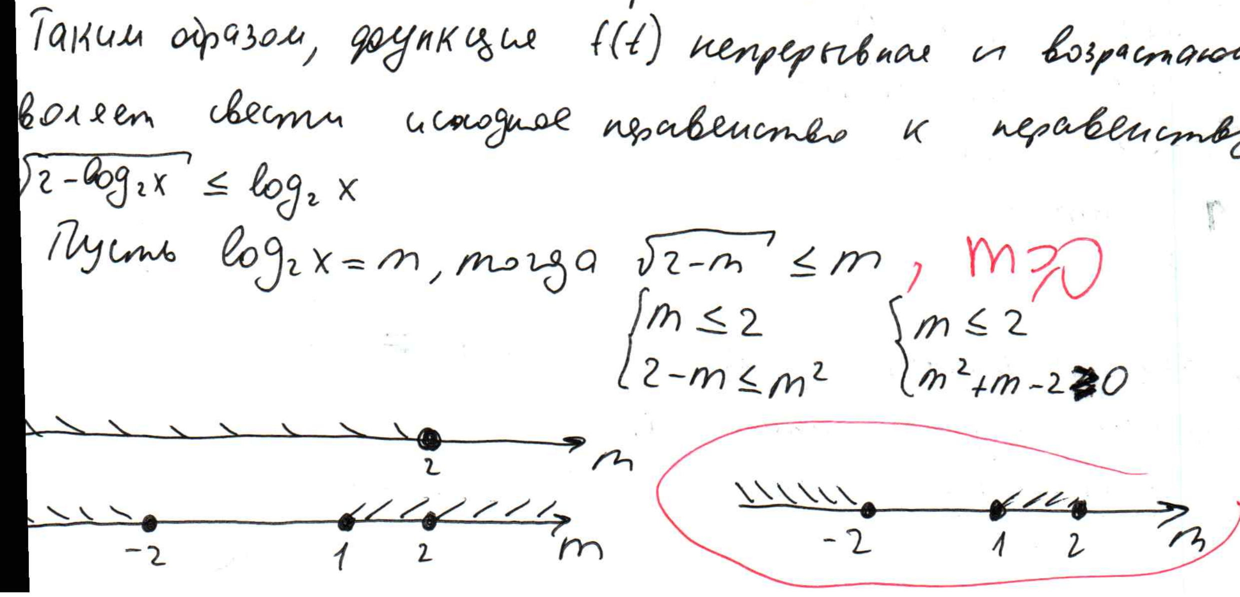
Пусть $h(t) = t + 14$. Графиком функции $h(x)$ является прямая, при этом $1 = 1 \Rightarrow$ функция возрастающая.

Таким образом, функция $f(t)$ непрерывная и возрастающая, что позволяет свести исходное неравенство к неравенству

$\sqrt{2-\log_2 x} \leq \log_2 x$

Пусть $\log_2 x = m$, тогда $\sqrt{2-m} \leq m$, $m \geq 0$

$\begin{cases} m \leq 2 \\ 2 - m \leq m^2 \end{cases}$ $\begin{cases} m \leq 2 \\ m^2 + m - 2 \geq 0 \end{cases}$



Сделаем проверку: При $m = -2$:

$$9\sqrt{2-(-2)}+2|4\sqrt{2-(-2)}-7| \le 9\cdot(-2)+2|4\cdot(-2)-7|$$

$$9\cdot 2+2|4\cdot 2-7| \le -18+2|-8-7|$$

$$18+2 \le -18+2\cdot 15$$

$$20 \le -18+30$$

$20 \not\le 12$ — неверно. Таким образом, решением неравенства будет являться $m \in [1;2]$

Вернемся к замене:

$$\begin{cases} \log_2 x \geq 1 \\ \log_2 x \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 4 \end{cases} \quad x \in [2;4]$$

+

Ответ: $x \in [2;4]$

Задание 3

$f(x) = ax^2+(a+1)x+b$

Графиком $f(x)$ является парабола, так как $f(x)$ принимает неотрицательные значения для всех x, то ветви параболы будут направлены вверх, то есть $a>0$ и ~~D~~ дискриминант меньше или равен нулю

$$D=(a+1)^2-4ab \le 0$$

Случай $a=0$ не проверен

$$a^2+2a+1-4ab \le 0$$

~~Из выражение $2a+b+1=n$ выразим b: $b=$~~

Пусть выражение $2a+b+1=n$. Тогда выразим из выражения n b: $b=n-2a-1$. Подставим b в неравенство:

$$a^2+2a+1-4a(n-2a-1) \le 0$$

$$a^2+2a+1-4an+8a^2+4a \le 0$$

$$9a^2+6a+1-4an \le 0$$

~~$(3a+1)^2-4an \le 0$~~

~~$n \geq \frac{(3a+1)^2}{4a}$~~

~~Введем функцию $g(a)=n \Rightarrow g(a) \geq \frac{(3a+1)^2}{4a}$~~

~~Найдем производную функции $g(a)$~~

~~$g'(a)=\frac{6(3a+1)\cdot 4a-4(3a+1)^2}{16a^2}=\frac{6(3a+1)a-(3a+1)^2}{4a^2}$~~

Задание 3 (продолжение)

11-09-407

63-11-09

$9a^2+6a+1-4an \le 0$

$4an \ge 9a^2+6a+1$

$n \ge \dfrac{9a^2+6a+1}{4a}$

Введем функцию $g(a) = \dfrac{9a^2+6a+1}{4a}$

Найдем (.) минимума этой функции

$g'(a) = \dfrac{(18a+6)\cdot 4a - 4(9a^2+6a+1)}{16a^2}$

$g'(a) = \dfrac{18a^2+6a-9a^2-6a-1}{4a^2} = \dfrac{9a^2-1}{4a^2}$

$g'(a)=0: \quad \dfrac{9a^2-1}{4a^2}=0 \Rightarrow 9a^2-1=0 \quad a^2=\frac{1}{9} \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$

$a=\frac{1}{3}$

$g'(a)$: $+$ | $-\frac{1}{3}$ | $-$ | $\frac{1}{3}$ | $+$ → a

$g(a)$: ↗ $-\frac{1}{3}$ ↘ $\frac{1}{3}$ ↗

(.)min

Таким образом, (.) $\frac{1}{3}$ является точкой минимума функции $g(a)$ и в ней функция принимает наименьшее значение.

~~$g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9\cdot\frac{1}{9}+6\cdot\frac{1}{3}+1}{4\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1+\frac{6}{3}+1}{\frac{4}{3}} = \dots$~~

$g\left(\frac{1}{3}\right) = \dfrac{9\cdot\frac{1}{9}+6\cdot\frac{1}{3}+1}{4\cdot\frac{1}{3}} = \dfrac{1+\frac{6}{3}+1}{\frac{4}{3}} = \dfrac{12\cdot 3}{3\cdot 4} = 3$

$b = ?$

В точке минимума функция принимает наименьшее значение. Таким образом, наименьшее значение выражения – это 3

Ответ: 3

...ание 6

$...00\cdot 10^{-6}$ Ф

...0 Ом

...0 Ом

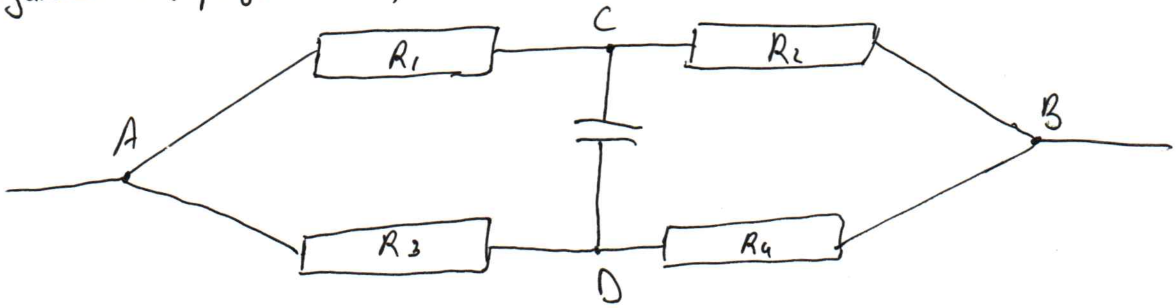
30 Ом

40 Ом

210 В

Через достаточно большой промежуток времени конденсатор зарядится и через него ток перестанет идти.

Задание 6 (продолжение)



$C = \frac{q}{U} \Rightarrow q = C\cdot U$

$I_1 = I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{U_0}{R_1+R_2} = \frac{210}{30} = 7$ A

$I_3 = I_4 \Rightarrow I_3 = \frac{U_0}{R_3+R_4} = \frac{210}{70} = 3$ A $U = \varphi_1 - \varphi_2$

$\varphi_A - \varphi_C = I_1 \cdot R_1 = 7\cdot 10 = 70$ В

$\varphi_A - \varphi_D = I_3 \cdot R_3 = 3 \cdot 30 = 90$ В

$\varphi_D - \varphi_C = 90 - 70 = 20$ В

$q = 20 \cdot 200 \cdot 10^{-6} = 4000 \cdot 10^{-6} = 4 \cdot 10^{-3}$ Кл

Ответ: $4 \cdot 10^{-3}$ Кл

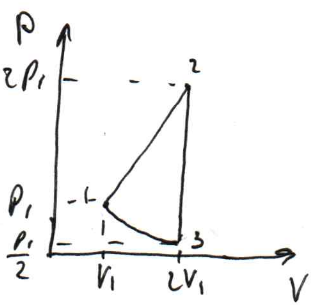
Задание 7

$T_1 = kV^2$

$V_3 = 2V_1$

$A_{12} = 2{,}16|A_{31}|$

η - ?



1-2: $T = kV^2$

$pV = \nu R T$

$pV = \nu R V^2$

$p = \nu R V$

$p_1 = \nu R V_1$

$p_2 = \nu R V_2$ $\Rightarrow$ $p_2 = 2p_1$, т.к. $V_2 = 2V_1$

3-1: $T = const$, $V_3 = V_2$

$p_1 V_1 = p_3 V_3$

$p_1 V_1 = p_3 \cdot 2V_1$ $\Rightarrow$ $p_3 = \frac{p_1}{2}$

$\eta = \frac{A}{Q_н}$ $A = A_{12} + A_{31}$, т.к. в процесе 2-3: $V = const$, а значит $A_{23} = 0$

$Q_н = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}$

Задание 7 (продолжение)

11-09-407 63-11-09

$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T$

$pV = \nu RT \Rightarrow \Delta U_{12} = \frac{3}{2} \Delta p \Delta V$

$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} \cdot (2p_1 - p_1)(2V_1 - V_1) = \frac{3}{2} \cdot p_1 \cdot V_1 = \frac{3}{2} p_1 V_1$

$A_{12} = \frac{p_1 + 2p_1}{2} \cdot (2V_1 - V_1) = \frac{3}{2} p_1 V_1$

$Q_н = \frac{3}{2} p_1 V_1 + \frac{3}{2} p_1 V_1 = 3 p_1 V_1$

$A_{31} = 2{,}16 A_{12} = 2{,}16 \cdot 1{,}5 \, p_1 V_1 = 3{,}24 p_1 V_1$

$A = A_{12} + A_{31} = 1{,}5 + 3{,}24 p_1 V_1 = 4{,}74 p_1 V_1$

$\eta = \frac{Q_н}{A} = \frac{3 p_1 V_1}{4{,}74 p_1 V_1} \approx 0{,}63$

$\eta = 0{,}63 \cdot 100\% = 63\%$

Ответ: 63 %

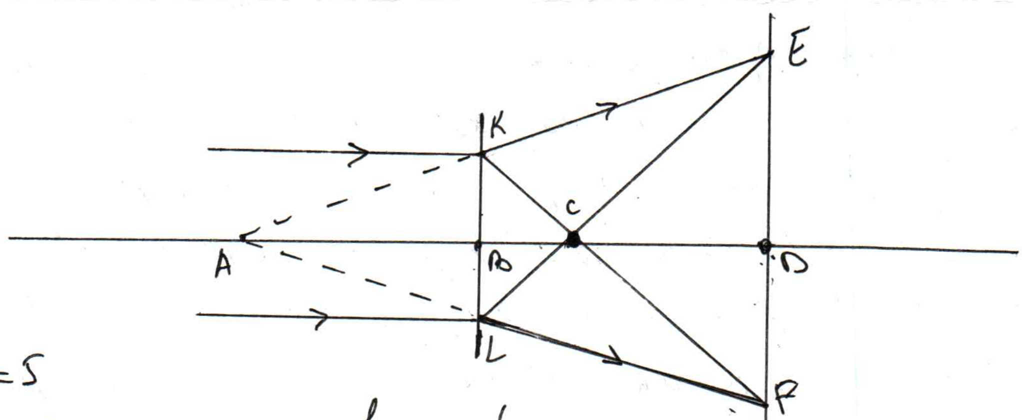
Задание 8

$D_р = -4$ Дптр

$= 5$ см

$= 20$ см

$- ?$



$KL = 5$

$EF = 20$

$AB = \frac{1}{|D_р|} = \frac{1}{4}$

Из подобия ΔFAE и ΔLAK: $\frac{AB}{AD} = \frac{KL}{EF} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

$AD = 4AB = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ $\quad BD = AD - AB = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Из подобия ΔCKL и ΔECF: $\frac{CB}{CD} = \frac{KL}{EF} = \frac{1}{4} \Rightarrow CD = 4CB$

$CB = \frac{1}{5} BD$

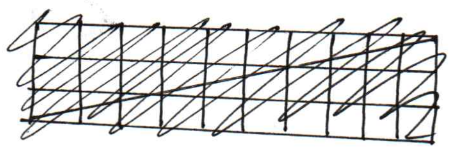
$CB = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$

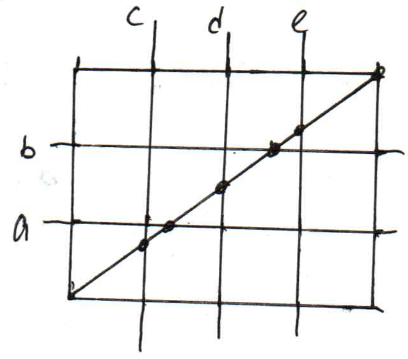
$D_c = \frac{1}{CB} = \frac{1 \cdot 20}{3} = \frac{20}{3} \approx 6{,}67$ Дптр

Задание 4

Так как все стороны параллелепипеда ~~взаимно п~~ являются взаимно простыми числами, то игла не пройдет ни через вершины, ни через ребра единичных кубиков, а будет пересекать только их грани.

Рассмотрим более простой случай: плоскость, состоящую из единичных квадратов





Как видно на рисунке, диагональ прямоугольника проходит через все ~~отрезки~~ прямые, делящие прямоугольник на единичные квадраты (это прямые a, b, c, d, e)

~~Кол-во таких прямых по~~

Кол-во таких прямых по горизонтали равно кол-во кубиков − 1, то есть если грань ~~паралл~~ прямоугольника равна f, то диагональ пересечет $f-1$ прямых, находящихся внутри этого прямоугольника. Аналогично и по вертикали. Таким образом, диагональ пересекает $(f_1-1)+(f_2-1)$ прямых находящихся внутри прямоугольника и делящих его на единичные квадраты, где f_1 и f_2 − длины сторон прямоугольника. Но кол-во квадратов, которые пересечет диагональ равно кол-ву отрезков на которые делится эта диагональ. Как известно, точка делит отрезок на два отрезка, две точки − на три отрезка, то есть кол-во отрезков равно кол-ву то[чек]. В нашем случае, кол-во точек делящих диагональ равно кол-ву прямых, которые пересекает эта диагональ, то есть кол-во точек равно $(f_1-1)+(f_2$

Таким образом, получаем, что диагональ делится на $(f_1-1)+(f_2-1)+1$ отрезков. Кол-во отрезков и равно кол-ву единичных квадратов, которые пересекает диагональ.

+

Вернемся к параллелепипеду: так как его диагональ не проходит через вер[шины] и ребра единичных кубиков, то можем воспользоваться формулой, полученной выше, добавив еще ~~одну~~ одно ребро паралле~~лограмма~~лепипеда. То есть, кол-во кубиков, которые пересекает диагональ равно $(f_1-1)+(f_2-1)+(f_3-1)+1$, где f_1, f_2, f_3 − стороны ~~параллелограмма~~ параллелепипеда

Воспользуемся формулой: $(6-1)+(7-1)+(11-1)+1 = 5+6+10+1 = 22$

Ответ: 22

11-05-407

63-11-09

Задание 2

Рассмотрим случай прямоугольника 2 x 4

б/ч	с	б/ч	с
с	ч/б	с	б/ч

Начнем закрашивать левый верхний угол черной краской, тогда рядом с ним может быть только серый цвет. Аналогично, если начать с белого цвета

с	б/ч	с	б/ч
б/ч	с	б/ч	с

Если начать с серого цвета, то получаем симметричный результат

Кол-во серых и цветных ячеек одинаковое для обоих случаев. Найдем вероятность того, что человек выберет именно такой цвет: она равна $\frac{1}{3}$. То есть клетки, которые могут ~~быть~~ быть закрашены чем черным, или белым цветом, будут таковыми с вероятностью $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. При этом кол-во клеток серого цвета равно $4 \cdot 2 : 2 = 4$. А кол-во цветных клеток: $2 \cdot 4 : 2 = 4$.

То есть, вероятность равна: $\cancel{\frac{2}{3}}$ ~~***~~ $\cancel{\frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{2}{3^2}}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$

Аналогично, в ~~параллелепипеде~~ прямоугольнике 8x12 кол-во ..х и цветных клеток равно: $\frac{8 \cdot 12}{2} = 8 \cdot 6 = \cancel{48}\ 48$

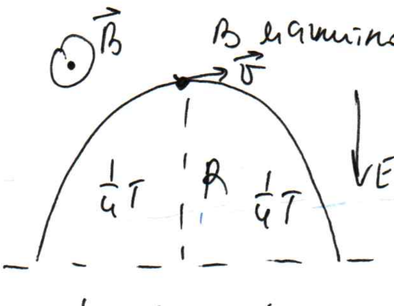
.. есть, вероятность равна $\left(\frac{2}{3}\right)^{48} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{48} = \frac{2^{48}}{3^{48+48}} = \frac{2^{48}}{3^{96}}$

±

Ответ: $\frac{2^{48}}{3^{96}}$ 2

..дание 5

B, E, h



В магнитном:

$h = R$

$F_л = Bq v \sin 90° \ 1$

$F_л = m a_ц$

$\Rightarrow Bqv = m a_ц$

$a_ц = \frac{v^2}{R}$

$Bqv = \frac{mv^2}{R}$

$Bq = \frac{mv}{R}$

$v = \frac{BqR}{m} = \frac{Bqh}{m}$

$t = \frac{1}{4} T$ (как $\frac{1}{4}$ окружности)

$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi h}{v} = \frac{2\pi h m}{Bqh} = \frac{2\pi m}{Bq}$

$t_1 = \frac{1}{4} T = \frac{\pi m}{2Bq}$

Задание 5 (продолжение)

~~Eq~~ В эл. поле: $F_{эл} = m a_ц$ $a_ц = \frac{v^2}{R}$

$$Eq = m\frac{v^2}{R}$$

$$Eq = \frac{mv^2}{h} \qquad Eqh = mv^2$$

$$\cancel{h} = v = \sqrt{\frac{Eqh}{m}}$$

$$t_2 = \frac{1}{4}T \qquad T = \frac{2\pi R}{v}$$

$$t_2 = \frac{\pi h\sqrt{m}}{2\sqrt{Eqh}} = \frac{\pi\sqrt{hm}}{2\sqrt{Eq}}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{2Bq} + \frac{\pi\sqrt{hm}}{2\sqrt{Eq}} = \frac{\pi\sqrt{m}}{2\sqrt{q}}\left(\frac{\sqrt{m}}{B\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{E}}\right)$$

$$t = \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{m}{q}}\left(\frac{1}{B}\cdot\sqrt{\frac{m}{q}} + \sqrt{\frac{h}{E}}\right)$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{q}}\left(\frac{1}{B}\cdot\sqrt{\frac{m}{q}} + \sqrt{\frac{h}{E}}\right)$

11-09-407

63-11-09

$$\begin{array}{r} \overset{3}{2}16 \\ \times\ 15 \\ \hline 80 \end{array}$$

Задание 3 (продолжение)

$$g'(a) = \frac{(3a+1)(6a-3a+1)}{4a^2} = \frac{(3a+1)(3a+1)}{4a^2} = \frac{(3a+1)^2}{4a^2}$$

$$g'(a)=0: \quad \frac{(3a+1)^2}{4a^2}=0 \Rightarrow (3a+1)=0$$
$$a=-\frac{1}{3}$$

$g'(a)$: $-$, $+$; $g(a)$: ↘ $-\frac{1}{3}$ ↗ a; (.)min

Таким образом, (.)min $g(a)$ находится в точке $(-\frac{1}{3})$

Найдем значение функции в (.) $(-\frac{1}{3})$:

$$g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right)^2}{4\left(-\frac{1}{3}\right)} = -1+1$$

$$\begin{array}{r} \overset{3}{2}16 \\ \times\ 15 \\ \hline 1080 \\ +\ 2160 \\ \hline 32{,}40 \\ +\ 1{,}5 \\ \hline 33{,}9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{3}{2}16 \\ \times\ 15 \\ \hline 1080 \\ +\ 2160 \\ \hline 3240 \\ +\ 1{,}5 \\ \hline 4{,}74 \end{array}$$

Задание 4

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\Delta P \Delta V$$

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}p_1V_1$$

$$\cancel{A_{12} = \frac{p_1-\frac{p_1}{2}+2p_1}{2}\cdot V_1 = \frac{\frac{p_1}{2}+2p_1}{2}\cdot V_1 = \frac{5p_1}{4}\cdot V_1 =}$$

$$A_{12} = \frac{p_1+p_2}{2}\cdot V_1 = \frac{3}{2}p_1V_1$$

$$\begin{array}{r} 3{,}24 \\ +\ 1{,}5 \\ \hline 4{,}74 \end{array}$$

$$Q_н = \frac{3}{2}p_1V_1 + \frac{3}{2}p_1V_1 = 3p_1V_1$$

$$A_{31} = 2{,}16\,A_{12} = 2{,}16\cdot\frac{3}{2}p_1V_1 = 32{,}4\,p_1V_1$$

$$A = 32{,}4\,p_1V_1 + 1{,}5\,p_1V_1 = 33{,}9\,p_1V_1$$

$$\begin{array}{r|l} 474 & 9 \\ -45 & \overline{52,} \\ \hline 24 & \\ -18 & \\ \hline 60 & \end{array}$$

$Q_н =$

$$\eta = \frac{33{,}9}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 33{,}9 & 3 \\ -27 & \\ \hline 69 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 174 & 3 \\ -\ 7 & \overline{158} \\ \hline 24 & \end{array}$$

4,74 | 3

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} \cdot (4p_1V_1 - p_1V_1) = \frac{9}{2} p_1V_1$$

$$Q_H = \frac{9}{2} p_1V_1 + \frac{3}{2} p_1V_1 = \frac{12}{2} p_1V_1 = 6 p_1V_1$$

6 | 0,74
1,

3 | 4,74
0

3000 | 474
− 2844 | 0,632
1560
− 1422
1380

20 | 3
− 18 | 6,67
20

3000 | 474
− 2844 | 0,63
1560
− 1422
13880

AB = 1/4 AB = 1/5

AD = 4/5

$$BD = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{25}$$

48 × 2 = 96

474 × 3 = 1422

474 × 6 = 2844

474 × 6 = 2848

747 × 3 = 2241

474 × 3 = 1422

$BqR = mv$

$$v = \frac{BqR}{m}$$