



**Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»**

шифр 58-10-22

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	11	12	13	0	10	10	15	15	86

Вариант 1

Задание 1.

Решение

Решение
 10^{80} можно представить как $2^{80} \cdot 5^{80}$, сократим дроби мы можем только на 2 или 5. Каждый раз когда 2 и 5 у нас получится при разложении числа $80!$ на простые множители, это число представляет собой упорядоченное произведение натуральных чисел, тогда каждое второе число в этом произведении даст хотя бы одну двойку (так как число целая часть от деления 80 на 2), каждое четвёртое по счету (то есть 40), каждое восьмое будет давать хотя бы 2^2 (20 чисел), каждое двенадцатое - 2^3 (10 таких чисел), каждое шестнадцатое - 2^4 (5 таких чисел), каждое 32 -е - 2^5 (2 числа), каждое 64 -ое - 2^6 (1 число). Минимальное число которое 2^7 будет делить, его нет в нашем произведении. (Под каждым числом введем такую формулу $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ в 1 кбывшем числе). Аналогично для 5. Каждое пятое число упорядоченного произведения будет иметь 1 при разложении на простые множители (16 чисел), каждое двадцатое пятое - 5^2 (три числа). Тогда при разложении числа $80!$ на простые множители у нас будет $40 + 20 + 10 + 5 + 2 + 1 = 78$ двоек и $16 + 3 = 19$ пятёрок, только на них мы и можем сократить. После всех сокращений у нас получится знаменатель $2^{80-78} \cdot 5^{80-19} =$
 $= 2^2 \cdot 5^{61}$
 Ответ: $2^2 \cdot 5^{61}$.

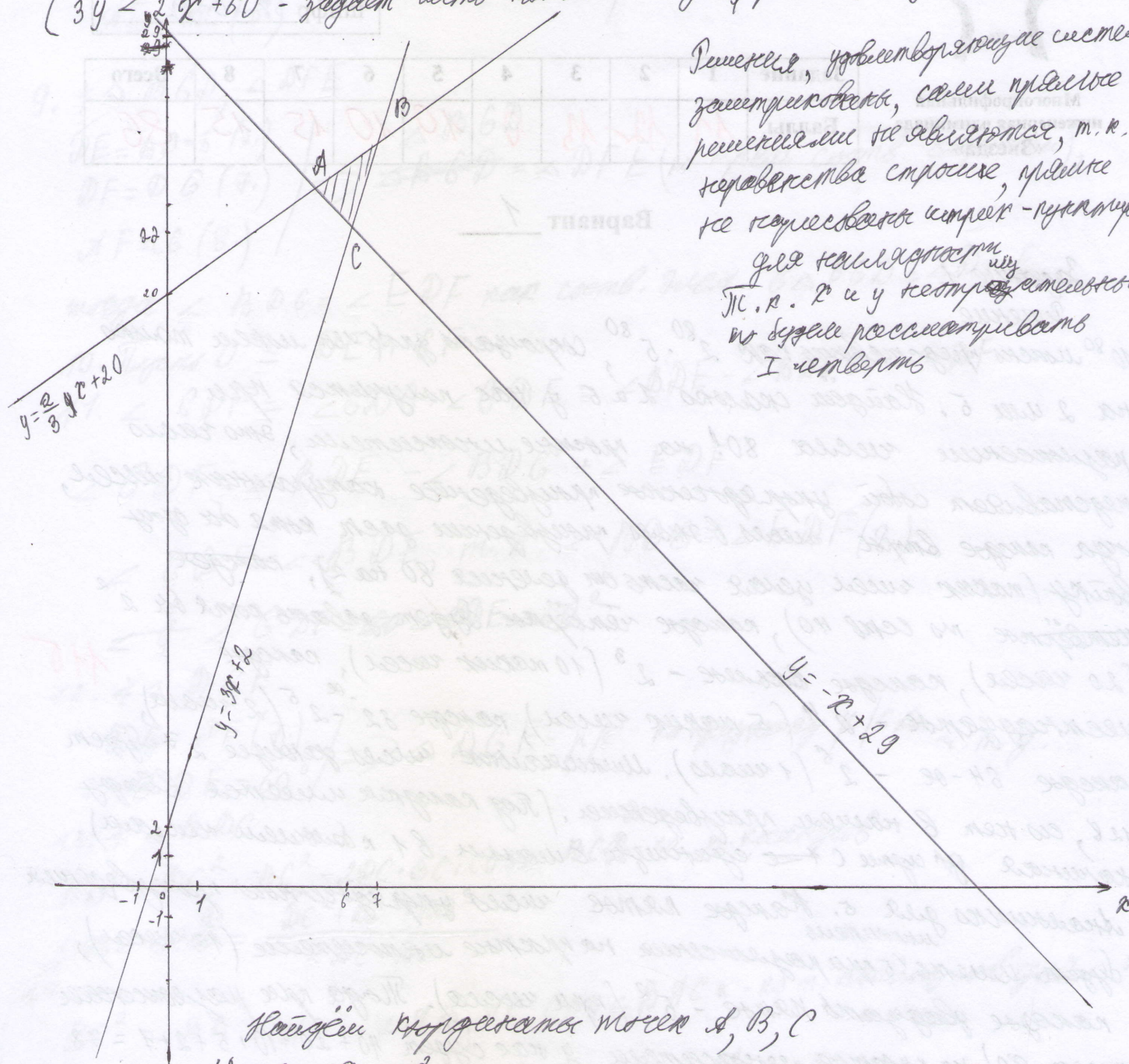
Задача 2.

Решение

Результаты

системы неравенств.

$$\begin{cases} x+y > 29 - \text{задаёт часть плоскости над прямой } y = -x+29 \\ y-2 > 3x - \text{задаёт часть плоскости над прямой } y = 3x+2 \\ 3y < 2x+60 - \text{задаёт часть плоскости под прямой } y = \frac{2}{3}x+20 \end{cases}$$



Решение, удовлетворяющее системе
записывается, если прямые
решением не являются, т.к.
неравенства строгие, границе
не принадлежат интервалу
для нахождения ^{или}
т.к. x и y неотрицательные,
то будем рассматривать
I четверть

Найдём координаты точек A, B, C

$$A: -x+29 = \frac{2}{3}x+20$$

$$\frac{5}{3}x = 9; x = \frac{27}{5} = 5,4; y = -x+29 = 29-5,4 = 23,6$$

$$A(5,4; 23,6)$$

$$B: \frac{2}{3}x+20 = 3x+2; \frac{7}{3}x = 18; x = \frac{54}{7} = 7\frac{6}{7}; y = 3x+2 = \frac{3 \cdot 54}{7} + 2 = \frac{162}{7} + 2 = 23\frac{4}{7}$$

$$y = 23\frac{1}{7} + 2 = 25\frac{1}{7}$$

$$B(7\frac{6}{7}; 25\frac{1}{7})$$

$$C: 3x+2 = -x+29; 4x = 27; x = 6,75; y = -x+29 = 29-6,75 = 22,25$$

$$C(6,75; 22,25)$$

как ввести из численного координат y и x должен быть только 6 или 7, т.к. $x \in \mathbb{Z}$. Но и y должен быть при которых значения x в действительности функции $y = -x + 29$ и $y = \frac{2}{3}x + 20$ равны 6

$$\begin{aligned} -x + 29 = 6; & x = 23 \\ \frac{2}{3}x + 20 = 6; & x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$y = -x + 29; y = 29 - 6 = 23$$

$$y = \frac{2}{3}x + 20 = \frac{2}{3} \cdot 6 + 20 = 24$$

при $x = 6$ $y \in (23; 24)$, в этот интервал там целый число, тогда $x = 6$ не подходит, теперь $x = 7$, для проверки СВ и АВ

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = \frac{2}{3}x + 20 \end{cases};$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot 7 + 20 = \frac{28}{3} + 20 = 4\frac{2}{3} + 20 = 24\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ x = 7 \end{cases};$$

$$y = 3 \cdot 7 + 2 = 23$$

при $x = 7$ $y \in [23; 24\frac{2}{3})$, в этот интервал лишь один y , удовлетворяющий условию $y = 24$

Будем доказывать, что все другие решения не удовлетворяют никакому из условий, тогда $x = 7, y = 24$ - единственное решение. Взяв все возможные значения x и y получим 24 человека.

125

Задача 3.

1. $\triangle ADC$ - р/с по усл., тогда $AD = DC = AC = 2$
 $\angle CDA = \angle DAC = 60^\circ$

2. $\triangle BDE$ - р/с по усл., тогда $BD = DE = BE = 5$
 $\angle BDE = \angle DBE = 60^\circ$

3. $\angle ADE$, $\angle BDE$ - смежные, тогда
 $\angle ADE + \angle BDE = 180^\circ$; $\angle ADE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

4. $\angle BDC$, $\angle ADC$ - смежные
 $\angle BDC + \angle ADC = 180^\circ$ по св. смеж. $\angle$
 $\angle BDC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

5. $\triangle ADE$, $\triangle BDC$

$$BD = DE = 5(2.)$$

$$AD = DC = 2(1.)$$

$$\angle ADE = \angle CDB = 120^\circ$$

$\Rightarrow \triangle ADE = \triangle CDB$
 (по 2 стор. и $\angle$ между ними),
 тогда $AE = BC$

6. $\triangle ADE$

$AF = FE$ (по усл.) $\Rightarrow DF$ - медиана $\triangle ADE$

7. $\triangle BDC$

$BG = GC$ (по усл.) $\Rightarrow DG$ - медиана $\triangle BDC$

тогда $DG = DF$ как соотв. элементы в равных $\triangle ADE$ и $\triangle CDB$

8. $CG = \frac{BC}{2}$, т.к. G-середина BC.

$AF = \frac{AE}{2}$, т.к. F-середина AE.

$AE = BC$ (5.)

9. $\triangle BGD, \triangle DFE$

$DE = BD = 5$ (2.)

$DF = DG$ (7.)

$AF = CG$ (8.)

$\Rightarrow \triangle BGD = \triangle DFE$ (по трем сторонам),

тогда $\angle BDG = \angle EDF$ как соответств. углы. $\triangle BGD = \triangle DFE$

10. Пусть $O = DE \cap GF$

11. $\angle GDF = \angle GDO + \angle ODF = \angle BDE - \angle BDG + \angle ODF$

$\angle GDF = \angle BDE - \angle BDG + \angle EDF$

$\angle GDF = \angle BDE$, т.к. $\angle BDG = \angle EDF$ (9.)

$\angle GDF = \angle BDE = 60^\circ$

12. $\triangle DGF$

$DG = DF$ (7.)

$\angle GDF = 60^\circ \Rightarrow \triangle DGF$ - эквilateralный $\triangle$.

13. $\triangle BDC$

$BD^2 = DC^2 + BC^2 - 2 \cdot DC \cdot BC \cdot \cos \angle BCD$ - по т. косинусов

$\cos \angle BCD = \frac{DC^2 + BC^2 - BD^2}{2 \cdot DC \cdot BC}$

14. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$ - по т. косинусов для $\triangle ABC$

$BC^2 = 7^2 + 2^2 - 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 49 + 4 - 28 \cdot \frac{1}{2} = 39$

$BC^2 = 39; BC = \sqrt{39}$

15. $\cos \angle BCD = \frac{DC^2 + BC^2 - BD^2}{2 \cdot DC \cdot BC} = \frac{4 + 39 - 25}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{39}} = \frac{18}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{39}} = \frac{9}{2 \cdot \sqrt{39}}$

16. $DG^2 = DC^2 + GC^2 - 2 \cdot DC \cdot GC \cdot \cos \angle BCD$ - по т. косинусов для $\triangle DCG$

$DG^2 = 4 + \left(\frac{\sqrt{39}}{2}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{39}}{2} \cdot \frac{9}{2 \cdot \sqrt{39}} = 4 + \frac{39}{4} - 9$

$DG^2 = 4 + 9,75 - 9 = 4,75; DG = \sqrt{4,75} = \frac{\sqrt{19}}{2}$

Ответ: $\frac{\sqrt{19}}{2}$.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 58-10-22

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

это приложение, см. предыдущий блок

Задача 6.

Дано: $W = \sigma T^4$; $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$; $l = 0,5 \text{ м}$, $d = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$
 $U = 220 \text{ В}$, $I = 5 \text{ А}$; $T = ?$

Решение

$W = \frac{Q}{S \cdot t}$, где S - площадь поверхности, t - время, Q - теплота

Площадь поверхности проволоки (ее сечение) можно определить, т.к. она очень мала по сравнению с площадью закрученной части проволоки (цилиндра), тогда $S = \pi d \cdot l$

$Q = I U t$ - по 2-му Дл. - Лек.

$$W = \sigma T^4; T^4 = \frac{W}{S t \cdot \sigma} = \frac{Q}{S t \cdot \sigma} = \frac{I U t}{\pi d l \cdot t \cdot \sigma} = \frac{I U}{\pi d l \sigma}$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{I U}{\pi d l \sigma}} = \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 220}{3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}}}$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 220}{3,14 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5,67 \cdot 10^{-16}}}$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{110}{314 \cdot 5,67}} \cdot 10^4 \text{ К}$$

$$\text{Ответ: } 10^{4,4} \sqrt{\frac{110}{314 \cdot 5,67}} \text{ К.}$$

Задача 7.

Дано: $I_1 = I_2 = I$. $\eta_1 = \eta_{1-2-3-1}$, $\eta_2 = \eta_{1-3-4-1}$; $\frac{\eta_1}{\eta_2} = ?$

Решение

$\eta_1 = \frac{A_1}{Q_1}$; где A_1 - работа газа в цикле 1-2-3-1, Q_1 - теплота нагрева газа в цикле 1-2-3-1

$$\eta_2 = \frac{d_2}{a_2}, \text{ где } d_2 - \text{радиус изгиба в узле 1-3-4-1}$$

a_2 - толщина нагиба изгиба в узле 1-3-4-1

радиус изгиба будет равен при установившемся процессе

будет равен толщине гофрировки, на ~~установившемся~~ ^{заданном} изгибе, тогда

$$d_1 = d_2 = 0,5 p_0 V_0, \text{ тогда } \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Допущение: скорость изгиба} \\ u = \frac{3}{2} p_0 V \\ \pm a = \pm u \pm A \end{array} \right\}$$

$$a_1 = a_{1-2} + a_{2-3} = \Delta u_{1-2} + A_{1-2} + \Delta u_{2-3} + a_{2-3} =$$

$$= \frac{3}{2} p_0 V_0 + 0 + \frac{3}{2} \cdot 2 p_0 V_0 + 2 p_0 V_0 = 6,5 p_0 V_0,$$

где Δu - изменение скорости изгиба, которое соответствует участкам изгиба.

$$a_2 = a_{1-3} = \Delta u_{1-3} + A_{1-3} = u_3 - u_1 + A_{1-3} = 3 p_0 V_0 + \frac{1,5}{2} \cdot 2 p_0 V_0 = 6 p_0 V_0$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6 p_0 V_0}{6,5 p_0 V_0} = \frac{6}{6,5} = \frac{12}{13}$$

Ответ: $\frac{12}{13}$.

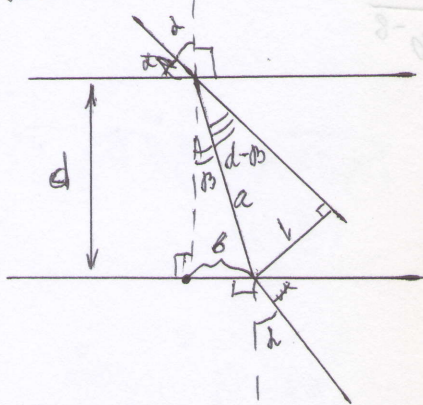
15

Задача 8.

Дано: $n_1 = 1, n_2 = 1,5,$

$y_n - ?$

Решение

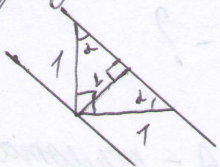


Тело d - параллельная пластинка,

d - толщина пластинки, проходящий лучи в пластинке, в u и l отклонены на расстояние из заданной скорости изгиба, что $\alpha = 45^\circ$

l - расстояние между частями луча 1 и частью луча 2, из условия $\alpha = 45^\circ$

лучи представляют как высоту в равнобедренном прямоугольном треугольнике с катетом 1, тогда $l = 1 \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



$$d = a \cdot \cos \beta$$

$$l = a \cdot \sin(\alpha - \beta); a = \frac{l}{\sin(\alpha - \beta)}$$

$$d = \frac{l \cdot \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1,5}{1} = 1,5 - \text{из закона преломления}$$

$$\sin \beta = \frac{2}{3} \sin \alpha = \frac{2}{3} \cdot \sin 45^\circ = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3} - \text{м.к. } 0^\circ < \beta < 90^\circ$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \quad (\text{вычисляем})$$

$$d = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}}{2 \cdot 3 \cdot \sin(45^\circ - \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{3}))} = \frac{\sqrt{14}}{6 \cdot \sin(45^\circ - \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{3}))}$$

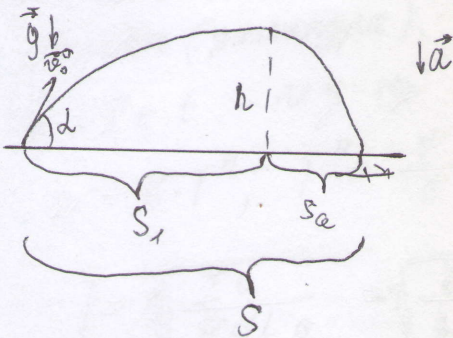
$$y_n = 4 - d = 4 - \frac{\sqrt{14}}{6 \cdot \sin(45^\circ - \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{3}))} = \frac{24 \cdot \sin(45^\circ - \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{3})) - \sqrt{14}}{6 \cdot \sin(45^\circ - \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{3}))}$$

$$\text{Ответ: } \frac{24 \cdot \sin(45^\circ - \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{3})) - \sqrt{14}}{6 \cdot \sin(45^\circ - \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{3}))}$$

Задача 6.

Дано: $\alpha = 30^\circ$, $v_0 = 10 \text{ м/с}$, $g = 10 \text{ м/с}^2$, $S = 5,196 \text{ м}$; $a = ?$

Решение



$$h = \frac{a t_a^2}{2}, \text{ где } t_a - \text{время наименьшего расстояния}$$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}{20} = 1,25 \text{ м}$$

$$S_1 = v_0 \cos \alpha \cdot t_1, \text{ где } t_1 - \text{время наименьшего расстояния}$$

$$S_2 = v_0 \cos \alpha \cdot t_a$$

$$S = S_1 + S_2; \quad h = \frac{g t_1^2}{2}; \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2,5}{10}} = 0,5 \text{ с}$$

$$S_1 = v_0 \cos \alpha \cdot t_1 = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,5 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$S_2 = S - S_1 = 5,196 - \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$t_a = \frac{S_2}{v_0 \cos \alpha}; \quad h = \frac{a t_a^2}{2}; \quad a = \frac{2h}{t_a^2} = \frac{2h \cdot v_0^2 \cos^2 \alpha}{S_2^2}$$

$$a = \frac{2 \cdot 1,25 \cdot 100 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(5,196 - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2 \cdot 125 \cdot 3}{4 \left(5,196 - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{187,5}{\left(5,196 - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} \text{ м/с}^2$$

$$a = \frac{187,5}{\left(5,196 - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} \text{ м/с}^2$$

$$\text{Ответ: } \frac{187,5}{\left(5,196 - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} \text{ м/с}^2$$