

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 18-09-22

Задание	1	2	3	4	5	6	7/8	Всего
Баллы	0	12	—	—	8	10	15/6	51

Вариант 1

№ 6.

Дано:

$$t_0 = 0^\circ\text{C}$$

$$S = 15 \text{ см}^2$$

$$\rho_{\text{л}} = 1 \text{ г/см}^3$$

$$\rho_{\text{в}} = 0,92 \text{ г/см}^3$$

график

Найти:

$m_{\text{л}}; m_{\text{в}}$

П.к. при внесении в тёплое помещение содержащее сосуд находилось при температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$, то лёд начал таять. П.к. ~~так~~ плотность льда меньше плотности воды ($\rho_{\text{л}} > \rho_{\text{в}}$ $1 \text{ г/см}^3 > 0,92 \text{ г/см}^3$), объём содержащего будет уменьшаться, площадь дна сосуда постоянна $\Rightarrow$ высота уровня воды понижается $\Rightarrow$ толщину льда соответствует участок графика с $t_0 = 0^\circ\text{C}$ от $t_1 = 20$ минут. За это время уровень воды уменьшился на $\Delta h = 120 \text{ см} - 115 \text{ см} = 5 \text{ см}$. В $t_1 = 20$ минут лёд полностью перешёл в жидкое состояние, воду. Значит $m_{\text{л}} = \rho_{\text{л}} V_{\text{л}} = \rho_{\text{л}} S h_{\text{л}} = m_{\text{в}} = \rho_{\text{в}} V_{\text{в}} = \rho_{\text{в}} S h_{\text{в}}$

$h_{\text{л}}$ - высота ~~такой~~ толщина льда в начале ($t_0 = 0$ мин)
 $h_{\text{в}}$ - уровень воды, получившейся из льда; $m_{\text{в}0} \neq m_{\text{в}}$

$$\rho_{\text{л}} S h_{\text{л}} = \rho_{\text{в}} S h_{\text{в}} \quad | : S$$

$$\rho_{\text{л}} h_{\text{л}} = \rho_{\text{в}} h_{\text{в}}$$

$$\rho_{\text{л}} h_{\text{л}} = \rho_{\text{в}} h_{\text{в}} - \rho_{\text{в}} \Delta h$$

$$h_{\text{л}} (\rho_{\text{л}} - \rho_{\text{в}}) = \rho_{\text{в}} \Delta h$$

$$h_{\text{л}} = \frac{\rho_{\text{в}} \Delta h}{\rho_{\text{л}} - \rho_{\text{в}}} = \frac{1 \text{ г/см}^3 \cdot 5 \text{ см}}{1 \text{ г/см}^3 - 0,92 \text{ г/см}^3} = 50 \text{ см} \Rightarrow m_{\text{л}} = h_{\text{л}} \cdot S \cdot \rho_{\text{л}} = 0,92 \text{ г/см}^3 \cdot 15 \text{ см}^2 \cdot 50 \text{ см} = 675 \text{ г}$$

$$m_{\text{в}0} = \rho_{\text{в}} \cdot V_{\text{в}0} = \rho_{\text{в}} \cdot S \cdot h_{\text{в}0}; h_{\text{в}0} = h_0 - h_{\text{л}}; h_0 - \text{высота ~~такой~~ уровня воды в } t_0 = 0 \text{ мин}$$

$$\Rightarrow m_{\text{в}0} = \rho_{\text{в}} \cdot S \cdot (h_0 - h_{\text{л}}) = 1 \text{ г/см}^3 \cdot 15 \text{ см}^2 \cdot (120 \text{ см} - 50 \text{ см}) = 1050 \text{ г}$$

Ответ: $m_{\text{л}} = 675 \text{ г}; m_{\text{в}0} = 1050 \text{ г}$

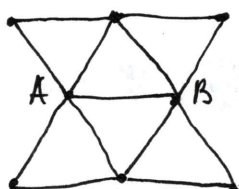
№ 7.

Дано:

$$R_0 = 10 \text{ Ом}$$

рисунк

Найти: $R_{\text{AB}}?$

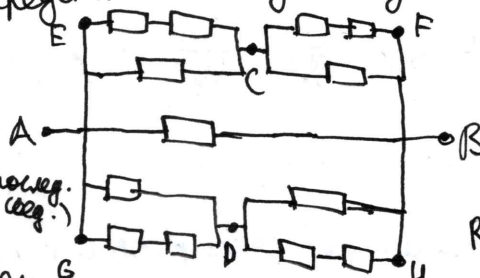


$$R_{\text{EC}} = R_0 + R_0 = 10 \text{ Ом} + 10 \text{ Ом} = 20 \text{ Ом} \quad (\text{послед. сог.})$$

$$R_{\text{AC}} = \frac{R_{\text{EC}} \cdot R_0}{R_0 + R_{\text{EC}}} = \frac{20 \text{ Ом} \cdot 10 \text{ Ом}}{20 \text{ Ом} + 10 \text{ Ом}} = \frac{20}{3} \text{ Ом} \quad (\text{парал. сог.})$$

$$R_{\text{CF}} = R_0 + R_0 = 10 \text{ Ом} + 10 \text{ Ом} = 20 \text{ Ом} \quad (\text{послед. сог.})$$

Представим эту схему более удобным образом:



Поставим дополнительные точки

$$R_{\text{CB}} = \frac{R_{\text{CF}} \cdot R_0}{R_0 + R_{\text{CF}}} = \frac{20 \text{ Ом} \cdot 10 \text{ Ом}}{20 \text{ Ом} + 10 \text{ Ом}} = \frac{20}{3} \text{ Ом} \quad (\text{парал. сог.})$$

$$R_{AD} = \frac{R_0 \cdot R_{GD}}{R_0 + R_{GD}} = \frac{20 \Omega \cdot 10 \Omega}{20 \Omega + 10 \Omega} = \frac{20}{3} \Omega \text{ (parallel. cseg.)}$$

$$R_{DB} = \frac{R_o \cdot R_{DH}}{R_o + R_{DH}} = \frac{100\Omega - 20\Omega}{100\Omega + 20\Omega} = \frac{20}{3} \Omega \text{ (parallel eq.)}$$

$$R_{AB} = \frac{R_{AB} \cos \theta}{\cos \theta} = \frac{R_{AB} \sin \theta}{\sin \theta}$$

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_{AB \text{ left}}} + \frac{1}{R_{AB \text{ right}}} + \frac{1}{R_0} = \frac{3}{40 \Omega} + \frac{3}{40 \Omega} + \frac{1}{10 \Omega} = \frac{10}{40 \Omega} = \frac{1}{4 \Omega} \Rightarrow R_{AB} = 4 \Omega$$

22.

x покупателей обслужили второй кассир до обеда, а y покупателей обслужили второй кассир после обеда; $x \geq 0, y \geq 0$, т.к. это количества посетителей.

	год	после	всего
первый-касир I	$0,75x$	$1,2y$	$0,75x + 1,2y$
второй-касир II	x	y	$x + y$

ко 10% больше $\Rightarrow$

$$1,75x + 2,2y < 250$$

$$0,75x + 1,2y = 1,1x + 1,1y \quad | \cdot 2$$

$$1,5x + 2,4y = 2,2x + 2,2y$$

$$0,24 = 0,4x$$

$$24 = 7x$$

$$y = 3,5x$$

$$\begin{cases} 1,45x + 2,2y \leq 250 \\ y = 3,5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,45x + 7,7x \leq 250 \\ y = 3,5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9,15x \leq 250 \\ y = 3,5x \end{cases}$$

$$\Rightarrow x < \frac{250}{9,45} \quad \Rightarrow x < \frac{50}{1,89} ; \frac{50}{1,89} < 30, \text{ m.k. } \frac{50}{1,89} < \frac{50}{\frac{5}{3}}, \text{ m.k. } 1,89 > \frac{5}{3}, \text{ m.k.}$$

Итак имеем: $x:20; x < 30; \Rightarrow x=20 \Rightarrow y=3,5 \cdot 20 = 70 \Rightarrow x+y=90$, проверим др. условие

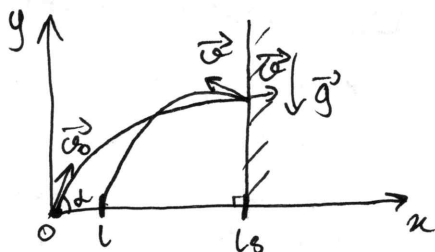
Ответ: второй кассир обслужил покупателей

$$0,75x = 15 \quad 1,2y = 84 \quad 0,75x + 1,2y = 99$$

$$\text{или} \quad 99 = 90 + 9$$

5.

Дано:
 $v_0 = 40 \text{ м/с}$
 $\alpha = 60^\circ$
 $g = 10 \text{ м/с}^2$
 $L = ?$



Разложим проекции скорости v_0 на оси Ox и Oy и проекции скорости v на оси Ox и Oy :

$$v_{x0} = \cos \alpha \cdot v_0 \quad v_x = v_{x0} = \cos \alpha \cdot v_0, \text{ т.к.}$$

$$v_{y0} = \sin \alpha \cdot v_0 \quad v_y = \text{ускорение}^2 \text{ действует}$$

только на вертикальную ось $Oy \Rightarrow$

$\Rightarrow$ скорость по Ox не

Заметим, что т.к. удар упругий, то по сути ~~этот~~ шарик полетел по траектории зеркальной той, ~~по~~ по которой он полетел бы, если бы стенки не было, относительно самой стенки, значит время достижения верхней точки полета и полное время полета останется таким же, как если бы стенки не было, т.е. в момент удара шарик зеркально повернулся и его скорость v сохранилась.

$$v_y = v_{y0} - g t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_{y0} - v_y}{g}$$

t_1 - время достижения стенки

$$v_y = \sqrt{v^2 - v_x^2} = \sqrt{v^2 - v_{x0}^2} \Rightarrow t_1 = \frac{v_{y0} - \sqrt{v^2 - v_{x0}^2}}{g} = \frac{v_0(\sin \alpha) - \sqrt{v^2 - v_0^2 \cos^2 \alpha}}{g}$$

$$t_n - \text{время достижения верхней точки: } 0 = v_{y0} - g t_n \Rightarrow t_n = \frac{v_{y0}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

t - время полного полета: $t = 2 t_n$

Разложим ~~время~~ t_2 , за которое он полетел до земли от стенки от стенки (это время является временем движения от стенки $\frac{t}{2}$ а

$$t_1 - \text{время движения к кув} : t_2 = t - t_1 = 2 t_n - t_1 = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{v_0 \sin \alpha - \sqrt{v^2 - v_0^2 \cos^2 \alpha}}{g}$$

$$z_g = \frac{v_0(2 \sin \alpha - \sin \alpha + \sqrt{v^2 - v_0^2 \cos^2 \alpha})}{g} = \frac{2 v_0 \sin \alpha - v_0 \sin \alpha + \sqrt{v^2 - v_0^2 \cos^2 \alpha}}{g}$$

$$= \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v^2 - v_0^2 \cos^2 \alpha}}{g}$$

85

$L = (L_1 - L_2)$, где L_2 - расстояние от стенки до места падения

$$L_1 = v_{x0} \cdot t_1$$

$$L_2 = v_{x0} \cdot t_2$$

$$\Rightarrow L = v_{x0} \cdot t_1 - v_{x0} \cdot t_2 = v_{x0} (t_1 - t_2) = v_{x0} \left(\frac{v_0 \sin \alpha - \sqrt{v^2 - v_0^2 \cos^2 \alpha}}{g} - \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v^2 - v_0^2 \cos^2 \alpha}}{g} \right) = \frac{v_{x0}}{g} (-2 \sqrt{v^2 - v_0^2 \cos^2 \alpha}) \Rightarrow \text{шарик упал}$$

$$L = \frac{2 v_{x0} \sqrt{v^2 - v_0^2 \cos^2 \alpha}}{g} = \frac{2 v_0 \sin \alpha \sqrt{v^2 - v_0^2 \cos^2 \alpha}}{g} = \frac{2 \cdot 40 \text{ м/с} \cdot \sin 60^\circ \cdot \sqrt{(30 \text{ м/с})^2 - (40 \text{ м/с})^2 \cdot \cos^2 60^\circ}}{10 \text{ м/с}^2}$$

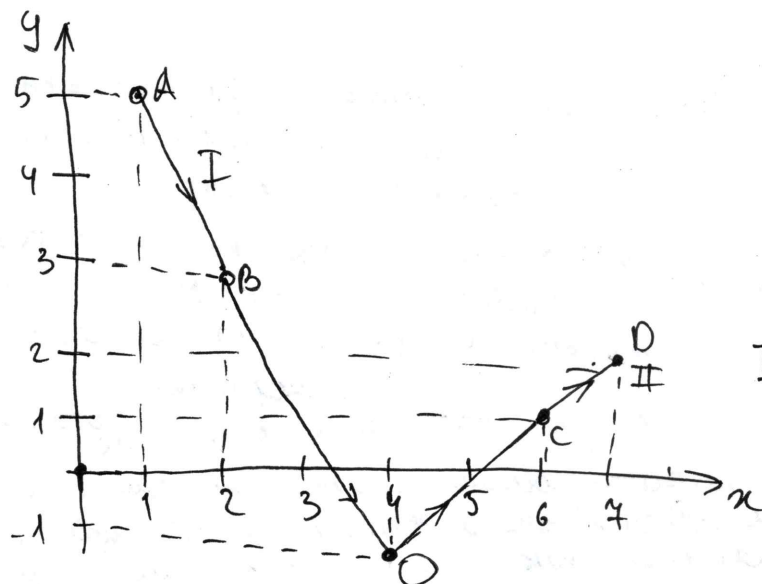
$$= 40\sqrt{3} \text{ м}$$

Ответ: $L = 40\sqrt{3} \text{ м}$

8.

$\frac{64}{3} > \frac{5}{3}$

Дано:
 мячик
 Координаты
 L



Обозначим точки A, B, C, D:

A, B с лучу I

C, D с лучу II

Составим уравнения прямых (т.к. лучи света идут прямо):

$$I: y = k_1 x + b_1$$

$$A(1; 5): 5 = k_1 + b_1$$

$$B(2; 3): 3 = 2k_1 + b_1$$

$$2 = -k_1 \Rightarrow k_1 = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 = -2 + b_1 \Rightarrow b_1 = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -2x + 7$$

$$II: y = k_{II} x + b_{II}$$

$$C(6; 1): 1 = 6k_{II} + b_{II}$$

$$D(4; 2): 2 = 4k_{II} + b_{II}$$

$$-1 = -k_{II} \Rightarrow k_{II} = 1 \Rightarrow 1 = 6 + b_{II} \Rightarrow b_{II} = -5 \Rightarrow y = x - 5$$

лучи пересекаются в точке отражения ^(то) $\Rightarrow$ прямые в ней пересекутся, а также координаты этой точки x_0 и y_0 :

$$\begin{cases} y = x - 5 \\ y = -2x + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = x_0 - 5 \\ y_0 = -2x_0 + 7 \end{cases} \Rightarrow x_0 - 5 = -2x_0 + 7$$

$$3x_0 = 12$$

$$x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = x_0 - 5 = 4 - 5 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O(4; -1)$$

Ответ: $O(4; -1)$ - координаты точки отражения.

н.л.

$$\begin{cases} x^2 + 2 = (y + z)^2 \\ y^2 + 3 = (x + z)^2 + \\ z^2 + 4 = (x + y)^2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6xy + 2xz + 2yz = 9$$

$$(x + y + z)^2 = 9$$

$$x + y + z = \pm 3$$

о.б.