



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
2	12	1	1	10	10	15	15	64

Шифр 36/1-10-04

№1.

$80! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 80$, представим в виде произведения простых множителей

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^4 \cdot 5$$

n_2 - кол-во множителей 2 в $80!$

n_5 - кол-во множителей 5 в $80!$

Нетрудно заметить, что $n_2 > n_5$

$2 \cdot 5 = 10$, каждая такая пара даёт 1 ноль в конце числа $80!$

отсюда кол-во нулей будет равно n_5

каждое 5е число $\div 5$, каждое 25 $\div 5^2$

$$n_5 = \left[\frac{80}{5} \right] + \left[\frac{80}{25} \right] = 16 + 3 = 19 \text{ нулей.}$$

при сокращении знаменатель станет $10^{80-19} = 10^{61}$, но остаются еще 2ки в числителе.

аналогично подготавливаем:

$$n_2 = \left[\frac{80}{2} \right] + \left[\frac{80}{4} \right] + \left[\frac{80}{8} \right] + \left[\frac{80}{16} \right] + \left[\frac{80}{32} \right] + \left[\frac{80}{64} \right] = 40 + 20 + 10 + 5 + 2 + 1 = 68$$

учтём, что 19 раз ушло в пары 2.5, ост. 2ки = 49.

$$\text{Конечный знаменатель: } 10^{61} = 2^{61} \cdot 5^{61} = 2^{12} \cdot 5^{61} = 10^{12} \cdot 5^{49}$$

$$\text{Ответ: } 5^{49} \cdot 10^{12}$$

2 балла

Handwritten signature



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 36/1-10-04

~2

Пусть x - число учеников в кружке «Вычислительная математика»,
 y - число уч-ов в кружке «Робототехника» $x, y \in \mathbb{N}$

Из условия:

$$\begin{cases} x+y > 29 \\ \frac{x-2}{y} > 3 \\ 0 < 3x-2y < 60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y > 29 & (1) \\ x-2 > 3y & (2) \\ 0 < 3x-2y < 60 & (3) \\ 3x-2y < 60 & (4) \end{cases}$$

$$(1)+(2): x+y-x+2 > 29-3y.$$

$$\begin{aligned} 4y &> 27 \\ y &> \frac{27}{4} \\ \underline{y &> 6} \end{aligned}$$

$$(2)+(4): \begin{cases} 3x-2y < 60 \\ 3y < x-2 \quad / \cdot 3 \end{cases}$$

$$\oplus \begin{cases} 3x-2y < 60 \\ 9y < 3x-6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 7y &< 54 \\ y &< 7 \frac{5}{7} \\ \underline{y &< 8} \end{aligned}$$

$$(1)-(4):$$

$$\begin{cases} x > 29-y \quad / \cdot 2 \\ 3x-2y < 60 \end{cases}$$

$$\oplus \begin{cases} 5x-2y < 2x \\ 3x-2y < 60 \end{cases}$$
$$5x-3x < 2x-60.$$

$$x > 23 \frac{3}{5}$$

$$\underline{x > 23}$$

$$(2)+(4):$$

$$\oplus \begin{cases} 3x-2y < 60 \quad / \cdot 3 \\ 3y < x-2 \quad / \cdot 2 \end{cases}$$

$$9x < 180 + 2x - 4$$

$$x < \frac{176}{7}$$

$$x < 25 \frac{1}{7}$$

$$\underline{x < 26}$$

И.В. Бачков
Жел

$$\text{Имеем: } x \in [24; 25]$$

$$\underline{y = 7.}$$

$$6 < y < 8$$

$$23 < y < 26$$

$$\textcircled{x=24}: 24+7 > 29 \quad 24-2 > 21 \quad 0 < \underbrace{24 \cdot 3 - 7 \cdot 2}_{58} < 60 \quad - \text{подходит}$$

$$x=25: 0 < \underbrace{25 \cdot 3 - 7 \cdot 2}_{61} < 60 \quad - \text{не подходит.}$$

Ответ: 24.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 36/1-10-04

~ 5.

Дано:

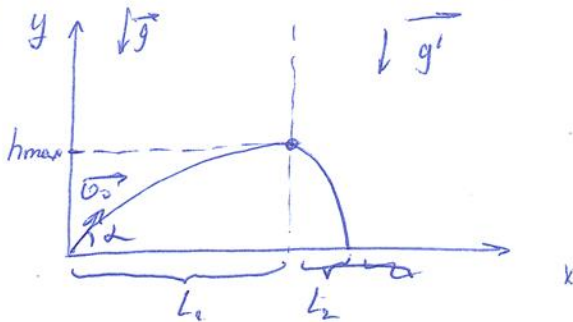
$$\alpha = 30^\circ$$

$$v_0 = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$S = 5,196 \text{ м}$$

$$g' = ?$$



$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

Закон движения:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t + x_0 \\ y = h_0 + v_0 \sin \alpha t - \frac{g t^2}{2} \end{cases}$$

в м. $h_{\max}$: $\vec{v}_y = 0 \Rightarrow v_0 \sin \alpha t_1 - g t_1 = 0$, t_1 - время до попадания в апогей.

$$g t_1 = v_0 \sin \alpha \rightarrow h_{\max} = v_0 \sin \alpha t_1 - \frac{g t_1^2}{2} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{g} - \frac{g (v_0 \sin \alpha)^2}{2g^2} = \frac{(v_0 \sin 2\alpha)^2}{2g}$$

$$L_1 = v_0 \cos \alpha t_1 = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

$$L_2 = S - L_1 = 5,196 - \frac{100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{20} \approx 0,866 \text{ м.}$$

Столкновение с землёй:

$$0 = h_{\max} + \underbrace{v_0 \sin \alpha t_{\text{наг}}}_{0} - \frac{g' t_{\text{наг}}^2}{2}$$

$$t_{\text{наг}} = \frac{2h_{\max}}{g'}$$

$$t_{\text{наг}} = \sqrt{\frac{2h_{\max}}{g'}} = \sqrt{\frac{2(v_0 \sin \alpha)^2}{2g'g}} = \frac{v_0 \sin \alpha}{\sqrt{g'g}}$$

$$L_2 = v_0 \cos \alpha t_{\text{наг}} = \frac{2v_0 \cos \alpha v_0 \sin \alpha}{2\sqrt{g'g}} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2\sqrt{g'g}}$$

$$2\sqrt{g'g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{L_2}; \quad g'g = \left(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2L_2} \right)^2; \quad g' = \frac{v_0^4 \sin^2 2\alpha}{4L_2^2 g}$$

$$= \frac{10^4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{4 \cdot (0,866)^2 \cdot 10} \approx 250 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Ответ: $250 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 36/1-10-04

~ 6.

$$\dot{Q} = \sigma T^4 \left[\frac{D \pi R}{\text{с.м}^2} \right] - \text{иными словами это мощность теплопотери с 1 м}^2$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \left[\frac{\text{Вт}}{\text{с.м}^2 \cdot \text{К}^4} \right]$$

Проволока перестанет нагреваться, когда всё поступающее к ней тепло будет отдаваться в окр. среду, то есть

$$P = \dot{Q} S$$

мощность нагрева

$$UI = \sigma T^4 S$$

$2\pi R \cdot L = \pi D L$

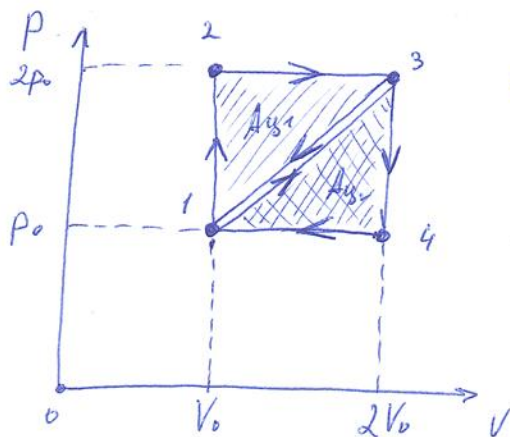
$$UI = \sigma \pi D L T^4$$

$$T^4 = \frac{UI}{\sigma \pi D L} ; T = \sqrt[4]{\frac{UI}{\sigma \pi D L}} = \sqrt[4]{\frac{220 \cdot 5}{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 10^{-2}}} =$$

$$= 1576,6 \text{ К.}$$

Ответ: 1576,6 К.

~ 7.



1-2-3-4:

(1-2): $V = \text{const}$ - изохорный процесс

$$A_{12} = 0.$$

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = \frac{i}{2} \nu R \Delta T_{12} = \frac{3}{2} \Delta p_{12} \cdot V_0 = \frac{3}{2} p_0 V_0.$$

(2-3): $p = \text{const}$ - изобарный процесс

$$Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T_{23} + 2p(2V_0 - V_0) = \frac{3}{2} \cdot 2p_0 V_0 + 2p_0 V_0 = 5p_0 V_0$$

$$A_{13} = \frac{(2p_0 - p_0)(2V_0 - V_0)}{2} = \frac{p_0 V_0}{2}$$

$$Q_{\text{получ}} = Q_{12} + Q_{23} = \frac{3}{2} p_0 V_0 + 5p_0 V_0 = \frac{13}{2} p_0 V_0$$

$$\eta_1 = \frac{A_{13}}{Q_{\text{получ}}} = \frac{\frac{p_0 V_0}{2}}{\frac{13}{2} p_0 V_0} = \frac{1}{13}.$$

Дано:

$$\bar{i} = 3.$$

$$\nu_1 = \nu_2 \equiv \nu$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = ?$$

$$\eta = \frac{A_{13}}{Q_{\text{получ}}} = 1 - \frac{|Q_{\text{от}}|}{Q_{\text{получ}}}$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 36/1-10-04

~ 7 (продолжение)

(1-3-4-1): (3-4): $|Q_{34}| = \Delta U_{34} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T_{34} = 3 p_0 V_0$.

$V = \text{const}$ (4-1): $|Q_{14}| = \frac{3}{2} \nu R \Delta T_{14} + p_0 (2V_0 - V_0) = \frac{5}{2} p_0 V_0$

$|Q_{от}| = \frac{11}{2} p_0 V_0$.

$A_{ч2} = \frac{p_0 V_0}{2}$
" $A_{ч1}$

$\eta_2 = \frac{A_{ч2}}{Q_{пнч2}} = 1 - \frac{|Q_{от2}|}{Q_{пнч2}}$

$A_{ч2} = Q_{пнч2} - |Q_{от2}|$

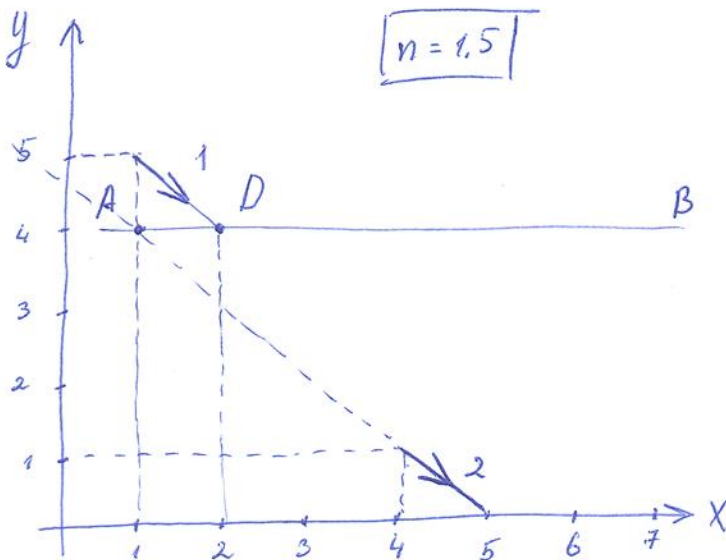
$Q_{пнч2} = A_{ч2} + |Q_{от2}| = \frac{p_0 V_0}{2} + \frac{11 p_0 V_0}{2} = 6 p_0 V_0$

$\eta_2 = \frac{A_{ч2}}{Q_{пнч2}} = \frac{p_0 V_0}{2 \cdot 6 p_0 V_0} = \frac{1}{12}$

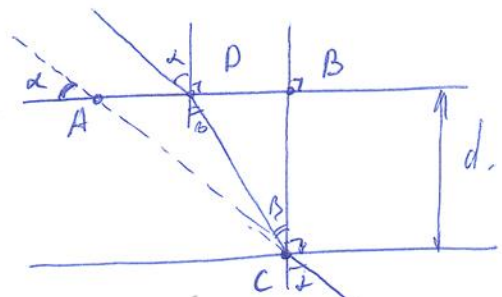
$\boxed{\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{12}{13}}$

Ответ: $\frac{12}{13}$

~ 8.



Пусть т. D - точка входа луча в пластину.



Продлим входной луч и заметим, что тот проходит

через т. A, также из рисунка следует $\alpha = 45^\circ$.

Закон преломления: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = n$
 $n_1 = 1$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

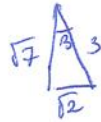
Шифр 36/1-10-04

~8 (продолжение)

$$\sin \alpha = 1,5 \sin \beta$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$



$$AB = BC = d \quad (\text{т.к. } \triangle ABC \text{ равнобедрен и } \angle B)$$

$$AD = 1 \quad (\text{из рисунка})$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{BD}{d} = \frac{BD}{AD + DB} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$BD = \sqrt{\frac{2}{7}} (1 + BD)$$

$$BD - \sqrt{\frac{2}{7}} BD = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$(1 - \sqrt{\frac{2}{7}}) BD = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$BD = \frac{\sqrt{\frac{2}{7}}}{1 - \sqrt{\frac{2}{7}}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{7}} + \frac{2}{7}}{\frac{5}{7}} = \frac{7\sqrt{\frac{2}{7}} + 2}{5}$$

$$d = BD + AD = \frac{7 + 7\sqrt{\frac{2}{7}}}{5} = \frac{7}{5} (1 + \sqrt{\frac{2}{7}})$$

$$y_n = y_0 - d = 4 - \frac{7}{5} (1 + \sqrt{\frac{2}{7}}) = \frac{20 - 7 - 7\sqrt{\frac{2}{7}}}{5} = \frac{13 - 7\sqrt{\frac{2}{7}}}{5} \approx 1,85$$

$$\text{Ответ: } y_n = 1,85$$