

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 58-11-23

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	3	13	13	10	10	10	0	71

Вариант

№

Восстанови сечение пирамиды плоскостью. Проведём NM и PN
 $X = NM \cap AD$, $Y = PN \cap CD$. Плоскости X и Y лежат на одной грани (ACD), так что мы
 можем их соединить. $Z = XY \cap CB$, $Z \in (CBS)$

$K = ZP \cap BS$

Ближе осталось
только провести
МК

$GMNH$ - сечение

$\frac{SK}{BK} = ?$

Для $\triangle ACS$ по т. Менелая

$$\frac{BK}{SK} \cdot \frac{SP}{PC} \cdot \frac{CA}{AS} = 1$$

Для $\triangle SAD$ (MN -сечение):

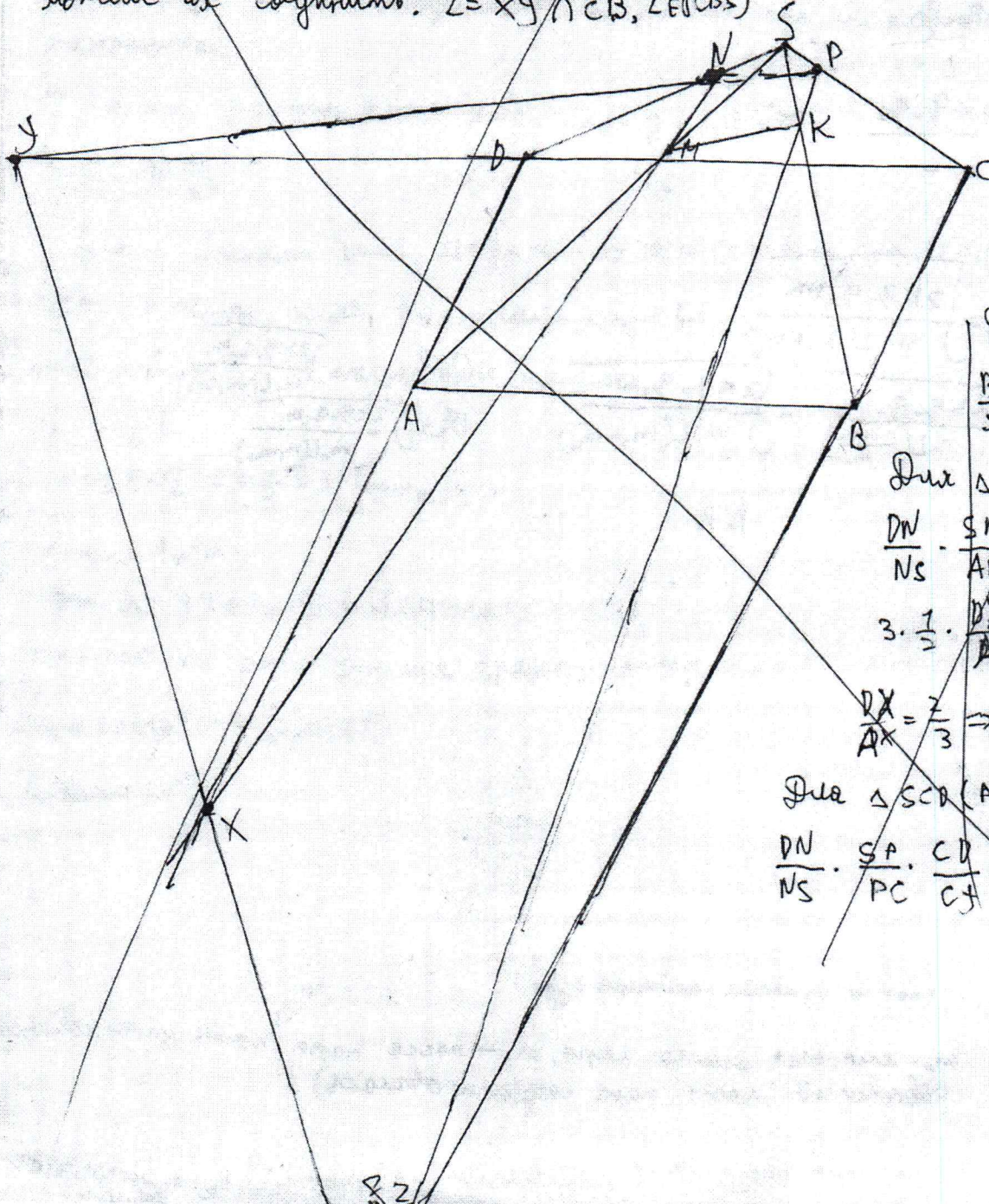
$$\frac{DN}{NS} \cdot \frac{SM}{AM} \cdot \frac{DX}{AX} = 1$$

$$3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{DX}{AX} = 1$$

$$\frac{DX}{AX} = \frac{2}{3} \Rightarrow DA = 2AX$$

Для $\triangle SCB$ (AN -сечение):

$$\frac{PN}{NS} \cdot \frac{SP}{PC} \cdot \frac{CB}{CS} = 1$$



N 6.

Закальный ударные системы из двух шаров радиус r . Шары разлетаются вдоль прямой, соединяющей их центры в противоположные направления, законна $m_1 v_1 = m_2 v_2$ (v_1, v_2 — модули скоростей 1-го и 2-го шара соответственно)

Закальная энергия системы $W_0 = \frac{k q_1 q_2}{L}$

$$\text{По ЗСЭ: } W = W_0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{k q_1 q_2}{L} \\ m_1 v_1 = m_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1 \end{cases}$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} v_1 \right)^2}{2} = \frac{k q_1 q_2}{L}$$

$$\frac{\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} \right) v_1^2}{2} = \frac{k q_1 q_2}{L}$$

$$m_1 v_1^2 \left(\frac{m_2 + m_1}{m_2} \right) = \frac{2 k q_1 q_2}{L}$$

$$v_1^2 = \frac{2 k q_1 q_2}{m_1 L \left(\frac{m_2 + m_1}{m_2} \right)}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 k q_1 q_2}{m_1 L \left(\frac{m_2 + m_1}{m_2} \right)}} = \sqrt{\frac{2 k q_1 q_2 m_2}{m_1 L (m_1 + m_2)}}$$

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1 = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{2 k q_1 q_2}{m_1 L \left(\frac{m_2 + m_1}{m_2} \right)}} = \sqrt{\frac{2 k q_1 q_2 m_1}{m_2 L (m_1 + m_2)}}$$

$$\text{Ответ: } v_1 = \sqrt{\frac{2 k q_1 q_2 m_2}{m_1 L (m_1 + m_2)}}; \\ v_2 = \sqrt{\frac{2 k q_1 q_2 m_1}{m_2 L (m_1 + m_2)}}$$

N 7.

$$P_0 V_0 = J_0 R T_0$$

$$V_0 = S \cdot h_0$$

$$P_1 V_1 = J_1 R T_1$$

$$V_1 = S \cdot h_1$$

$$P_1 = 2 P_0$$

$$\begin{cases} P_0 \cdot S \cdot h_0 = J_0 R T_0 \\ 2 P_0 \cdot S \cdot h_1 = J_1 R T_1 \end{cases}$$

$$\frac{h_0}{2 h_1} = \frac{J_0 T_0}{J_1 T_1} \quad T = T_0 = T_1 \text{ (пар не изменил температуру)}$$

$$\frac{h_0}{2 h_1} = \frac{J_0}{J_1} = \frac{m_0}{m_1}$$

m_0 — начальная масса пара, m_1 — масса пара после установившегося равновесия (часть пара конденсировалась)

$P_1 = P_2 = 2 P_0$ (пар как раньше оказался в полном равновесии), P_2 — атмосферное давление

$$P_0 \cdot S h_0 = \frac{m_0}{\mu} R T$$

$$\frac{P_a}{2} \cdot S h_0 = \frac{m_0}{\mu} R T$$

$$m_0 = \frac{2 R T}{P_a \cdot S h_0 \cdot \mu} = \frac{2 \cdot 8,31 \cdot 373}{10^{-5} \cdot 10^{-2} \cdot 0,3 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}$$

$$m_0 = \frac{P_a \cdot S h_0 \cdot \mu}{2 R T} = \frac{10^5 \text{ Па} \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 \cdot 0,3 \cdot 18 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}{2 \cdot 8,31 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}} = \frac{0,3 \cdot 18}{2 \cdot 8,31} \text{ кг} \approx 0,8712$$

Ответ: 0,8712

WS.

Пто, что ускорение непостоянно и не равно g можно объяснить лишь наличием сил сопротивления воздуха $F_{\text{сопр}}$. $a = g + a_{\text{сопр}}$. Как как в течение первых z графа представляет прямую линию, $F_{\text{сопр}} = \pm v$, где v - скорость тела, а $\pm$ - неизвестная константа.

В момент времени $t=0$, $a = g + a_{\text{сопр}} = g + \pm v_0 = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

$$\pm v_0 = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

В момент времени $t=z$, $a = g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \Rightarrow v_1 = 0$ (скорость при $t=z$). Значит тело летит вверх z секунд, после чего начало падать.

$$m(v_0 - v_1) = m v_0 = \Delta p = \text{изменение импульса}$$

$$\Delta p = m g T$$

$$\Delta p = \sum F \cdot T = m g T + F_{\text{сопр}} \cdot T$$

$$F_{\text{сопр}} = q_{\text{сопр}} \cdot m$$

$$\Delta p \Rightarrow v_0 = g T + q_{\text{сопр}} T = T(g + q_{\text{сопр}})$$

Как как на этом участке графика - прямая $q_{\text{сопр}} = \frac{q_0 + q_1}{2} = \frac{20 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} + 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{2} = 15 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

$$v_0 = 20(10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} + 15 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}) = 50 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Ответ: 50 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$

N 6.

Начальный импульс системы из двух шаров равен 0. Шары разлетаются вдоль прямой, соединяющей их центры в противоположных направлениях, зная $m_1 v_1 = m_2 v_2$ (v_1, v_2 — модули скоростей 1-го и 2-го шаров соответственно)

Начальная энергия системы $W_0 = \frac{k q_1 q_2}{L}$

$$\text{По ЗСЭ: } W = W_0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{k q_1 q_2}{L} \\ m_1 v_1 = m_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1 \end{cases}$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} v_1 \right)^2}{2} = \frac{k q_1 q_2}{L}$$

$$\frac{\left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} \right) v_1^2}{2} = \frac{k q_1 q_2}{L}$$

$$m_1 v_1^2 \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right) = \frac{2 k q_1 q_2}{L}$$

$$v_1^2 = \frac{2 k q_1 q_2}{m_1 L \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right)}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 k q_1 q_2}{m_1 L \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right)}} = \sqrt{\frac{2 k q_1 q_2 m_2}{m_1 L (m_1 + m_2)}}$$

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1 = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{2 k q_1 q_2}{m_1 L \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right)}} = \sqrt{\frac{2 k q_1 q_2 m_1}{m_2 L (m_1 + m_2)}}$$

$$\text{Ответ: } v_1 = \sqrt{\frac{2 k q_1 q_2 m_2}{m_1 L (m_1 + m_2)}}; \\ v_2 = \sqrt{\frac{2 k q_1 q_2 m_1}{m_2 L (m_1 + m_2)}}$$

N 7.

$$p_0 V_0 = \nu_0 R T_0$$

$$V_0 = S \cdot h_0$$

$$p_1 V_1 = \nu_1 R T_1$$

$$V_1 = S \cdot h_1$$

$$p_1 = 2 p_0$$

$$p_0 \cdot S \cdot h_0 = \nu_0 R T_0$$

$$2 p_0 \cdot S \cdot h_1 = \nu_1 R T_1$$

$$\frac{h_0}{2 h_1} = \frac{\nu_0 T_0}{\nu_1 T_1} \quad T = T_0 = T_1 \text{ (так как изотермический процесс)}$$

$$\frac{h_0}{2 h_1} = \frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{m_0}{m_1}$$

m_0 — начальная масса пара, m_1 — масса пара после установившегося равновесия (часть пара конденсировалась)

$p_1 = p_{\text{атм}} = 2 p_0$ (так как пар только оказался в насыщенном равновесии), p_0 — атмосферное

N2.

003?

$$\begin{cases} \frac{\log_3 x \cdot \log_4 y}{\log_2(xy)} = \frac{1}{3} \\ \frac{\log_3 y \cdot \log_{25} z}{\log_5(yz)} = \frac{3}{5} \\ \frac{\log_{27} z \cdot \log_2 x}{\log_{16}(zx)} = 1 \end{cases}$$

Sejam $a = \log_2 x$, maka $\log_3 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 3} = \frac{a}{\log_2 3}$; $\log_{16} x = \frac{1}{4} \log_2 x = \frac{1}{4} a$

Sejam $b = \log_2 y$, maka $\log_4 y = \frac{1}{2} \log_2 y = \frac{1}{2} b$; $\log_3 y = \frac{b}{\log_2 3}$; $\log_{25} y = \frac{b}{\log_2 5}$

Sejam $c = \log_2 z$, maka $\log_5 z = \frac{c}{\log_2 5}$; $\log_{25} z = \frac{1}{2} \log_5 z = \frac{1}{2} \frac{c}{\log_2 5}$;

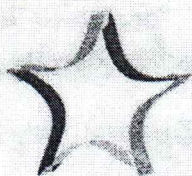
$\log_{16} z = \frac{1}{4} c$, $\log_{27} z = \frac{1}{3} \log_3 z = \frac{1}{3} \frac{c}{\log_2 3}$

$$\begin{cases} \frac{\frac{a}{\log_2 3} \cdot \frac{1}{2} b}{a+b} = \frac{1}{3} \\ \frac{\frac{b}{\log_2 3} \cdot \frac{1}{2} \frac{c}{\log_2 5}}{\frac{b}{\log_2 3} + \frac{c}{\log_2 5}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\frac{\log_2 5}{\log_2 3} b \cdot \frac{1}{2} c}{b+c} = \frac{3}{5} \\ \frac{\frac{1}{3} \frac{c}{\log_2 3} \cdot a}{\frac{1}{4} c + \frac{1}{4} a} = 1 \Rightarrow \frac{\frac{4}{3} \frac{c}{\log_2 3} \cdot a}{a+c} = 1 \end{cases}$$

$a+b = \frac{3}{\log_2 3} a \cdot \frac{1}{2} b = \log_3 8 \cdot a \cdot \frac{1}{2} b = \log_3 8 \cdot ab \Rightarrow a(\log_3 8 \cdot b - 1) = b \Rightarrow a = \frac{b}{\log_3 8 \cdot b - 1}$

$b+c = \frac{5}{\log_2 3} \cdot \log_3 5 \cdot b \cdot c \Rightarrow c(\log_3 5 \cdot b - 1) = b \Rightarrow c = \frac{b}{\frac{5}{\log_2 3} \cdot \log_3 5 \cdot b - 1}$

$a+c = \frac{4}{3 \log_2 3} a \cdot c$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 58-11-23

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 7

№3.

$$4^x + \sin^4 y + \ln^6 z = 16 \quad \ln^6 z < 16 \text{ (т.е. } 4^x + \sin^4 y > 0)$$

$$\text{Дано: } 2^{x+1} + 3\sin^2 y - 6\ln^3 z \leq 28$$

$$(2^{x+1} - 4^x) + (3\sin^2 y - \sin^4 y) + (-6\ln^3 z - \ln^6 z) \leq 12 \text{ (нужно доказать)}$$

Рассмотрим выражение $2^{x+1} - 4^x$. Пусть $f(x) = 2^{x+1} - 4^x$. Найдем её максимум.

$$f'(x) = (2 \cdot 2^x - 4^x)' = 2 \cdot \ln 2 \cdot 2^x - 4^x \cdot \ln 4 = 2 \cdot \ln 2 \cdot 2^x - 2 \cdot \ln 2 \cdot 4^x = 2 \ln 2 (2^x - 4^x) = 0$$

$$f_{\max}(x) = 2 \cdot 2^0 - 4^0 = 0$$

$$2^x - 4^x = 0$$

$x=0$ — максимум функции

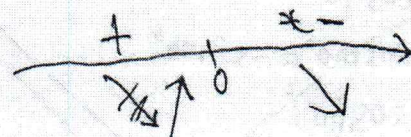
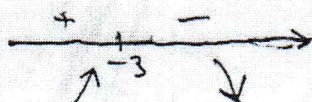
$$3\sin^2 y - \sin^4 y \leq 3\sin^2 y \leq 3$$

$$-6\ln^3 z - \ln^6 z. \quad \ln^6 z < 16 \Rightarrow |\ln^3 z| < 4$$

$$\text{Пусть } \ln^3 z = t. \quad (|t| < 4)$$

Найдем максимальное значение этого выражения.

$$g(t) = (-6t - t^2)' = -6 - 2t = 0 \Rightarrow t = -3$$



Значит, максимум выражения $-6\ln^3 z - \ln^6 z$ достигается при $\ln^3 z = -3$ и равен 9.

$$\begin{aligned} & (2^{x+1} - 4^x) + (3\sin^2 y - \sin^4 y) + (-6\ln^3 z - \ln^6 z) \\ & \leq 0 + 3 + 9 \end{aligned}$$

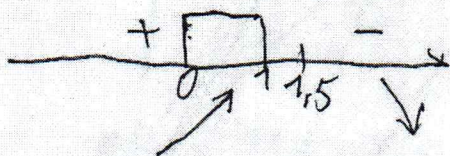
$$3\sin^2 y - \sin^4 y.$$

$$\text{Пусть } \sin^2 y = t \quad (t \in [0; 1])$$

Пусть $f(t) = 3t - t^2$. Исследуем эту функцию.

$$f'(t) = 3 - 2t = 0 \text{ (в т. максимум)}$$

$$t = 1,5$$



Значит, $3\sin^2 y - \sin^4 y$ принимает максимальное значение при $\sin^2 y = 1$. Это значение равно $3 - 1 = 2$.

$$\begin{aligned} (2^{x+1} - 4^x) &\leq 1 \\ (3\sin^2 y - 4\sin^4 y) &\leq 2 \\ (-6\ln^3 2 - \ln^6 2) &\leq 12 \end{aligned}$$



Даже при максимальном значении каждого слагаемого условие выполняется.
н.м.г.

$$a_1 = \cos 10^\circ$$

$$a_2 = \cos 100^\circ = -\sin 10^\circ$$

$$a_3 = \cos 1000^\circ. \text{ Преобразуем это выражение.}$$

$$1000 = 6 \cdot 180 - 80$$

$$\frac{1000^\circ}{180} = \frac{50}{9} = 5,5\bar{5} = 6 - \frac{4}{9}$$

$$1000^\circ = 5,5 \cdot 180^\circ$$

$$1000^\circ = 180^\circ \left(6 - \frac{4}{9}\right) = 1080^\circ$$

Преобразуем

н.м.г.

$$a_1 = \cos 10^\circ$$

$$a_2 = \cos 100^\circ = -\sin 10^\circ$$

$$a_n = \cos(10^n)^\circ$$

Преобразуем

$$\frac{(10^n)^\circ}{180} = \frac{1000^\circ}{180} \cdot 10^{n-3} = \frac{50}{9} \cdot 10^{n-3}$$

н.м.г.

$$a_1 = \cos 10^\circ$$

$$a_2 = \cos 100^\circ = -\sin 10^\circ$$

$$a_3 = \cos 1000^\circ$$

$$1000 = 180^\circ \cdot 6 - 80^\circ$$

$$a_3 = \cos 1000^\circ = \cos 80^\circ$$

$$a_4 = \cos 10000^\circ = \cos(56 \cdot 180^\circ - 80^\circ) = \cos 80^\circ$$

N4.

$$a_1 = \cos 10^\circ$$

$$a_2 = \cos 100^\circ = -\sin 10^\circ$$

Вспомогательный, что 10° можно представить как $360 - k - 80$ при $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$

$n=3$ - базис индукции

$$10^\circ = 360 - 3 - 80 - \text{верно}$$

$$\text{Вспомогательный } 10^\circ = 360 - k - 80.$$

$$\text{Вспомогательный } 10^{n+1} = (360 - k - 80) \cdot 10 = 10k \cdot 360 - 800 = (10k - 2) \cdot 360 - 80 = 360 \cdot k - 80 \quad (k = 10k_1 - 2)$$

$$\text{Значит, } a_n = \cos(10^n) = \cos(360 \cdot k - 80) = \cos(-80) = \cos 80 = \sin 10^\circ \quad (\text{при } n \geq 3)$$

$$a_1 \cdot \cos x + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \cdot \sin x = \cos 10^\circ \cdot \cos x + (-\sin 10^\circ + \sin 10^\circ + \sin 10^\circ) \cdot \sin x = \cos 10^\circ \cdot \cos x + \sin 10^\circ \cdot \sin x = \cos(x - 10^\circ)$$

Найдем значение этого выражения при $x = 190^\circ$

Ответ: -1.

(X) 13

N1.

Вспомогательный сечение с помощью метода следов

$$P = PN \cap CD$$

$$Q = MN \cap AD$$

$$R = QN \cap BC$$

$$K = PR \cap SB$$

PKMW - сечение

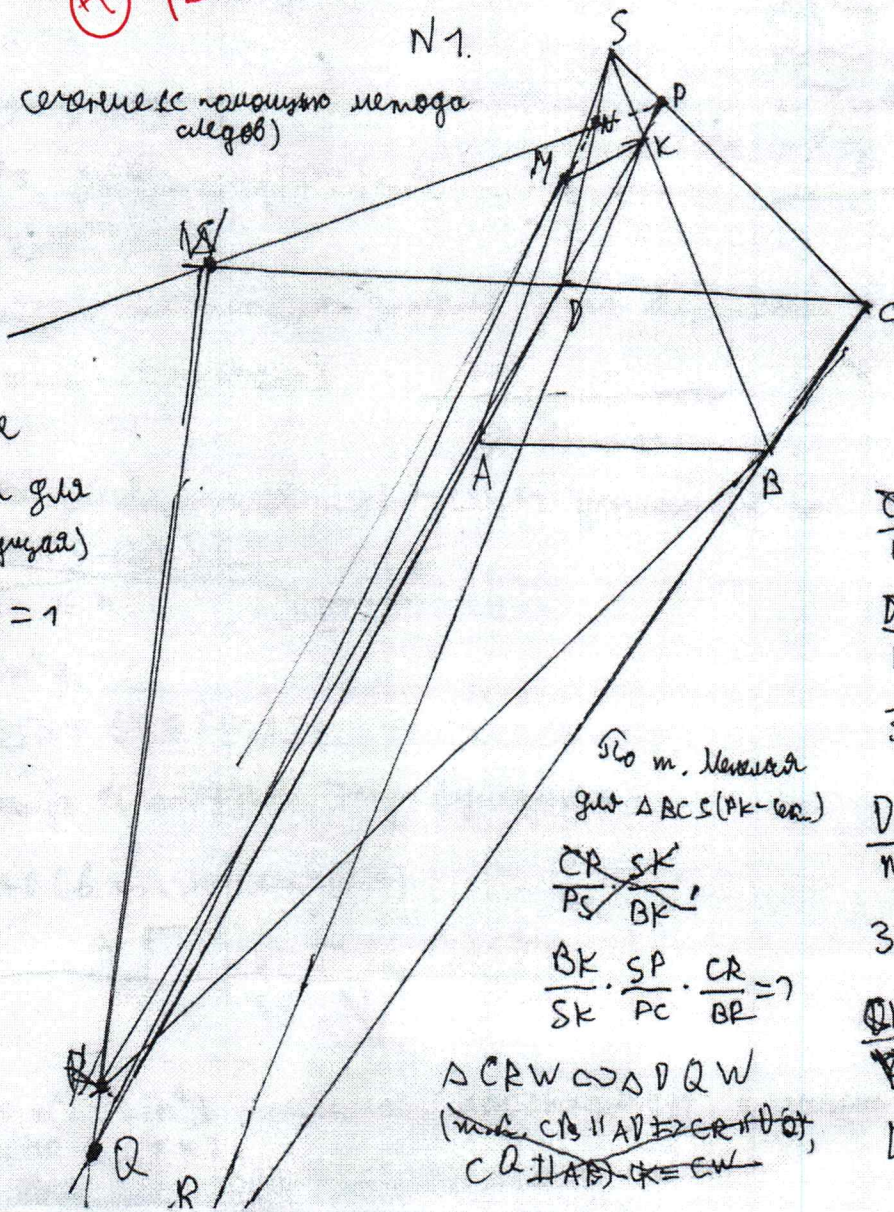
По м. Меньшая гл. $\triangle SAD$ (NM - секущая)

$$\frac{AM}{MS} \cdot \frac{SN}{NW} \cdot \frac{DQ}{AQ} = 1$$

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{DQ}{AQ} = 1$$

$$\frac{DQ}{AQ} = \frac{3}{2}$$

$$AQ = 2AD$$



По м. Меньшая гл. $\triangle ASD$ (PN - секущая)

$$\frac{AP}{PS} \cdot \frac{SN}{DN} = 1$$

$$\frac{DN}{NS} \cdot \frac{AP}{AC} \cdot \frac{AQ}{QD} = 1$$

$$3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{AQ}{QD} = 1$$

$$\frac{DQ}{QW} \cdot \frac{SP}{PC} \cdot \frac{CW}{DW} = 1$$

$$3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{CW}{DW} = 1$$

$$\frac{QW}{DW} = \frac{4}{3}$$

$$DW = 3CD \quad \text{w} \quad (X)$$

По м. Меньшая гл. $\triangle BCS$ (PK - секущая)

$$\frac{CP}{PS} \cdot \frac{SK}{BK} = 1$$

$$\frac{BK}{SK} \cdot \frac{SP}{PC} \cdot \frac{CR}{BR} = 1$$

$\triangle CRW \sim \triangle DQW$
($CR \parallel AD \Rightarrow \angle CRW = \angle DQW$,
 $CQ \parallel AB \Rightarrow \angle CRW = \angle DQW$)