

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 23-11-20

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

№ 1

$$7\sqrt{2-\log_3 x} - 3|2\log_3 x - 5| \leq 7\log_3 x - 3|2\sqrt{2-\log_3 x} - 5|$$

Пусть $\sqrt{2-\log_3 x} = t$, $t \geq 0$, тогда

$$2 - \log_3 x = t^2$$

$$\log_3 x = 2 - t^2$$

$$7t - 3|2t^2 - 1| \leq 14 - 7t^2 - 3|2t - 5|$$

$$7t - 6t^2 - 3 \leq 14 - 7t^2 - 3|2t - 5|$$

$$t^2 + 7t - 17 \leq -3|2t - 5|$$

$$\begin{cases} t^2 + 7t - 17 \leq 6t - 15 \\ 0 \leq t < 2,5 \\ t^2 + 7t - 17 \leq -6t + 15 \\ t \geq 2,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 + t - 2 \leq 0 \\ 0 \leq t < 2,5 \\ t^2 + 13t - 32 \leq 0 \\ t \geq 2,5 \end{cases}$$

$$t^2 + 13t - 32 = 0$$

$$D = 169 + 128 = 297$$

$$t_1 = \frac{-13 - \sqrt{297}}{2}$$

$$t_2 = \frac{-13 + \sqrt{297}}{2}$$

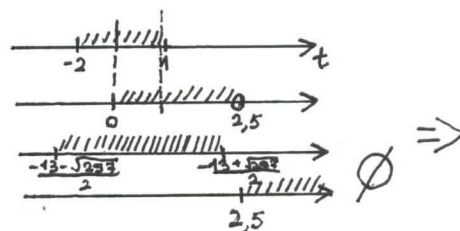
$$\Rightarrow 0 \leq t \leq 1$$

Вернемся к замене

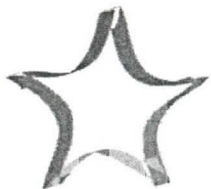
$$\begin{cases} \sqrt{2-\log_3 x} \geq 0 \\ \sqrt{2-\log_3 x} \leq 1 \\ 2-\log_3 x \geq 0 \\ 2-\log_3 x \leq 1 \\ \log_3 x \leq 2 \\ \log_3 x \geq 1 \\ 0 < x \leq 9 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$\sqrt{2}$

$\Downarrow$



Ответ: $[3; 9]$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-20

Всего в прямоугольнике 6×14 клеток, т.е. 84 клетки. Всего возможных раскрашенных прямоугольников будет 3^{84} (различения с повторами). Чтобы получить прямоугольник, удовлетворяющий условию задачи, необходимо, чтобы серые клетки передавались с группами, т.е. серыми клетками заполнено 50% или 42 клетки, оставшиеся 42 клетки надо раскрасить белыми и (или) черными. Таких прямоугольников будет 2^{42} . Т.к. можно раскрасить серые клетки, начиная со второй и т.д., то благоприятных исходов будет $2^{42} \cdot 2$. Следовательно искомая вероятность равна $\frac{2^{43}}{3^{84}}$.

C		C		C	
	C		C		C
C		C		C	
	C		C		C
C		C		C	
	C		C		C
C		C		C	
	C		C		C
C		C		C	
	C		C		C
C		C		C	
	C		C		C

Ответ: $\frac{2^{43}}{3^{84}} = 2 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{42}$

Ответ: $2 \left(\frac{2}{9}\right)^{42}$

Нам дана функция:

$$f(x) = ax^2 + (3a+1)x + b$$

и известно, что она принимает неотрицательные значения для всех x

Требуется найти наименьшее значение выражения:

$$4a+b$$

1. Функция $f(x)$ - это квадратичная функция вида:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Для того чтобы квадратичная функция не принимала отрицательных значений для всех x , должны выполняться два условия:

1. Коэффициент при x^2 должен быть неотрицательным ($a \geq 0$).

2. Дискриминант квадратного уравнения должен быть неположительным ($D \leq 0$).

$$2. D = (3a+1)^2 - 4ab \leq 0$$

Раскрываем скобки:

$$D = 9a^2 + 6a + 1 - 4ab \leq 0$$

3. Выразим b из неравенства:

$$4ab \geq 9a^2 + 6a + 1$$

Разделим на $4a$ (при $a > 0$):

$$b \geq \frac{9a^2 + 6a + 1}{4a}$$

Подставляем в выражение $4a+b$:

$$4a+b \geq 4a + \frac{9a^2 + 6a + 1}{4a}$$

4. Приведем к общему знаменателю:

$$F(a) = \frac{25a^2 + 6a + 1}{4a}$$

Дифференцируем и решаем уравнение $F'(a) = 0$

Получаем:

$$a = \frac{1}{5}$$



Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр 23-11-20



Подставим значение a в выражение для b

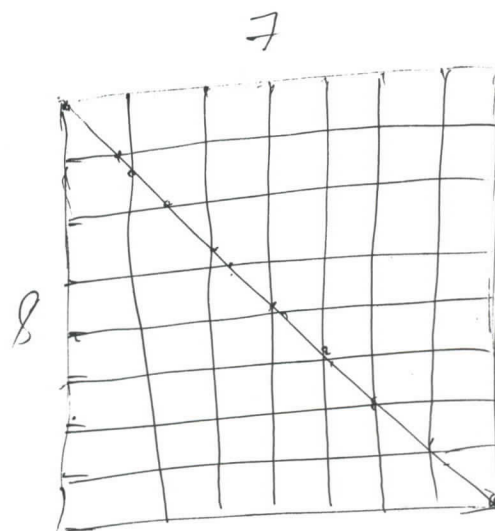
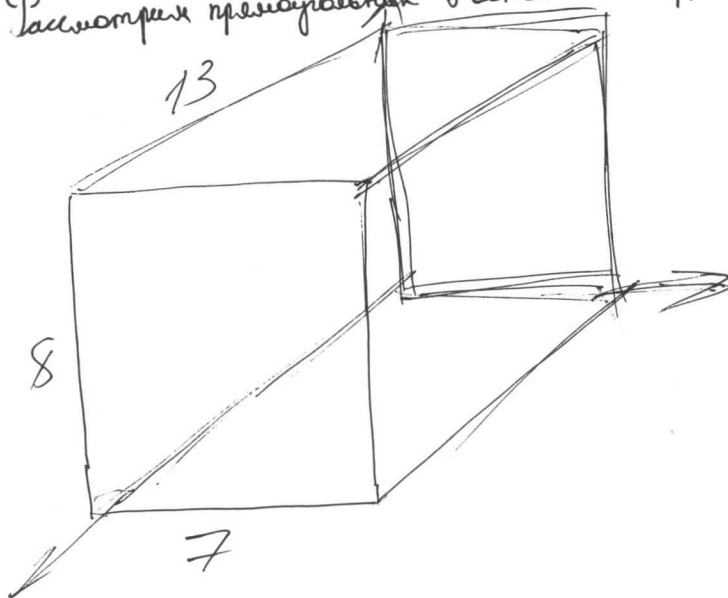
$$b = \frac{16}{5}$$

5. Считаем $4a + b$:

$$4a + b = 4 \cdot \frac{1}{5} + \frac{16}{5} = 4$$

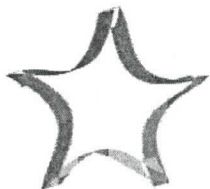
Ответ: 4

Рассмотрим прямоугольник в основании параллелепипеда (7×8)



Диагональ прямоугольника пересекает плоскости, которыми разбит параллелепипед 13 раз. Рассмотрим диагональное сечение и проведем его диагональ, она пересечет в верхнем слое 1 кубик, далее 3, затем 5 слоев по 2 кубика и симметрично оставшиеся т.е. 3, 1, 3, 1. При этом по условию задачи под „прожженный“ кубиком, скорее всего, понимают, что отрезок проходит через внутреннюю часть этого кубика, а не лишь касается его грани, ребра или вершины. Если же отрезок касается какого-то кубика только в граничной точке (например, в самом конце $(7, 8, 13)$), этот кубик не засчитывается. В конце $(7, 8, 13)$, этот кубик не засчитывается. В конце у нас лишь касание в углу $(7, 8, 13)$, не считаем, последний кубик.

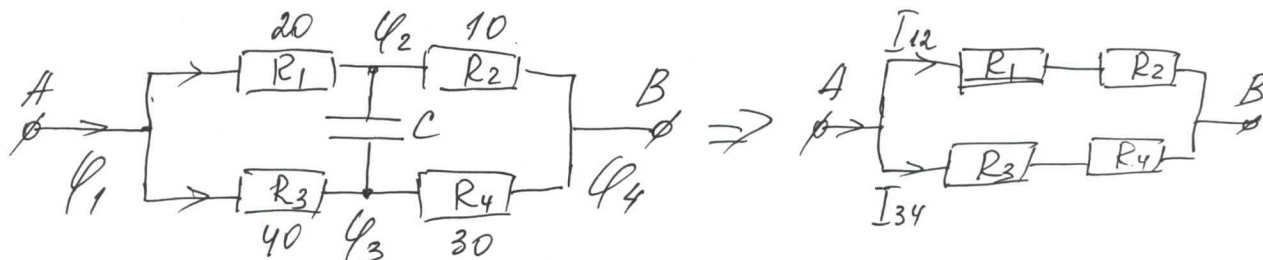
Ответ: 25



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-20

№6



$$R_{\text{од}} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{(R_1 + R_2) + (R_3 + R_4)}$$

$$U_C = U_3 - U_2$$

$$\left. \begin{aligned} U_1 - U_2 &= I_{12} R_1 \\ U_1 - U_3 &= I_{34} R_3 \end{aligned} \right\} U_1 - U_2 - (U_1 - U_3) = I_{12} R_1 - I_{34} R_3$$

$$U_3 - U_2 = I_{12} R_1 - I_{34} R_3$$

$$\begin{aligned} U_{12} &= U_{34} \\ I_{12} (R_1 + R_2) &= I_{34} (R_3 + R_4) \\ I_{34} &= \frac{I_{12} (R_1 + R_2)}{R_3 + R_4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_3 - U_2 &= I_{12} R_1 - \frac{I_{12} (R_1 + R_2) \cdot R_3}{R_3 + R_4} = I_{12} \frac{(R_1 R_3 + R_1 R_4 - R_1 R_3 - R_2 R_3)}{R_3 + R_4} = \\ &= I_{12} \cdot \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_3 + R_4} \end{aligned}$$

$$I_{12} = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

$$U_3 - U_2 = \frac{U_0 (R_1 R_4 - R_2 R_3)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

$$U_3 - U_2 = \frac{4 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 30 - 10 \cdot 40}{(20 + 10)(40 + 30)} = 40 \text{ В}$$

$$Q = C U_2 = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 0,02 \text{ Кл}$$

$$q = 0,02 \text{ Кл}$$

Ответ: 0,02 Кл



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-20

15

Дано:

Положительно заряженная частица (заряд q , масса m) движется вертикально вверх. В момент времени $t = 0$, она на высоте h попадает в однородное горизонтальное магнитное поле с индукцией B . Когда частица достигает наивысшей точки траектории, она покидает магнитное поле и попадает в однородное электрическое поле с напряжённостью E , направленной вертикально вниз. Определить, через какое время частица снова окажется на высоте h . (Безымянный)

① Движение в магнитном поле.

В магнитном поле на частицу действует сила Лоренца, которая не меняет модуль скорости, а лишь поворачивает её направление. Частица движется по дуге окружности с угловой скоростью

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

Для поворота скорости на 90° ($\frac{1}{4}$ периода кругового движения) время определяется как:

$$T_B = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{m}{qB} = \frac{\pi m}{2qB}$$

Известно, к концу этого промежутка вертикальный компонент скорости обнуляется. То "наивысшая точка" здесь достигается не за счёт гравитации (её проследит игнорировать), а потому что сила Лоренца "разворачивает" вектор v из вертикального положения в горизонтальное. Пока скорость "поворачивается", её модуль v остаётся постоянным, а вертикальный компонент убывает от v до 0.

$$z(t) = \frac{v}{\omega} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{v}{\omega} = \frac{mv}{qB}$$

Если на момент $t = 0$ частица была на высоте h , то к концу движения в магнитном поле она поднимается ещё на $\frac{mv}{qB} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h_{\max} = h + \frac{mv}{qB}$$

② Движение в электрическом поле

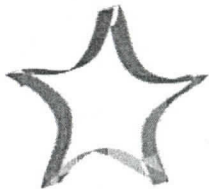
В тот же момент, когда вертикальный компонент скорости стал нулевым, частица покидает область магнитного поля и влетает в однородное электрическое поле напряжённости E , направленное вертикально вниз. Заряд q положителен, значит сила qE действует вниз.

В момент, когда в электрическом поле ($t = 0$) вертикальная скорость равна нулю

$$z(0) = h_{\max} = h + \frac{mv}{qB}$$

Ускорение в д.г. вертикали

$$a_z = \frac{F_z}{m} = \frac{qE}{m} \text{ (вниз)}$$



**Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»**

Шифр 23-11-20

Если вверх считать положительным направлением оси z , то ускорение отрицательно (-)

Когда частица вернется на высоту h

Закон движения вдоль z (отсчет $t=0$)

$$z(t) = h_{\text{max}} + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \left(-\frac{qE}{m} \right) t^2 = \left(h + \frac{mv}{qB} \right) - \frac{qE}{2m} t^2$$

т.к. $z(t) = h$, то имеем

$$h = h + \frac{mv}{qB} - \frac{qE}{2m} t^2 \Rightarrow \frac{qE}{2m} t^2 = \frac{mv}{qB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2m}{qE} \cdot \frac{mv}{qB}} = \sqrt{\frac{2m^2 v}{q^2 B E}}$$

③

$$T_{\text{общ}} = \frac{\pi m}{2qB} + \sqrt{\frac{2m^2 v}{q^2 B E}}$$

№ 7.

Ответ: $T_{\text{общ}} = \frac{\pi m}{2qB} + \sqrt{\frac{2m^2 v}{q^2 B E}}$

① Дано:

Π_1 $1 \rightarrow 2$ (изобарный ($T = \text{const}$))

Π_2 $2 \rightarrow 3$ (изохорный ($V = \text{const}$))

Π_3 $3 \rightarrow 1$ (изотермический ($T = \text{const}$))

Объемы: $V_2 = 3V_1$

Связь: $A_{12} = 3,6 A_{31}$

Найти КПД

②. Уравнение Менделеева-Клапейрона

$$pV = nRT$$

Процессы $1, 2, 3$:

Т.1. $T_1 = k V_1^2$

Т.2. $T_2 = k (3V_1)^2 = 9k V_1^2$

Т.3. $T_3 = T_1$

③ Энергия (внутренняя) идеального газа, выраженная через i

$$U = \frac{i}{2} nRT_1$$

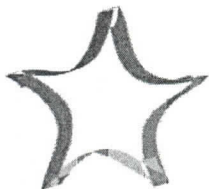
Для каждой точки

То ч. 1. $U_1 = \frac{i}{2} nRT_1$

То ч. 2. $U_2 = \frac{i}{2} nRT_2 = \frac{i}{2} nR(9T_1) = 9U_1$

То ч. 3. $U_3 = \frac{i}{2} nRT_3 = U_1$

||



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-20

4) Кол-во Q на каждом этапе

Закон термодинамики $Q = \Delta U + A$

1 $\rightarrow$ 2 (расширение, квадратичный закон)

• Изменение внутренней энергии

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = 9U_1 - U_1 = 8U_1$$

• Работа газа (по числу молей 3,64)

$$A_{12} = 3,64 A_{31}$$

$\Rightarrow$ • Переданное тепло
 $Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = 8U_1 + 3,64 A_{31}$

2 $\rightarrow$ 3

• Изменение внутр энергии

$$\Delta U_{23} = 0 \quad A_{23} = 0$$

• Работа газа

$$3 \rightarrow 1 \quad A_{31} = nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_3} = nRT_1 \ln \frac{1}{3}$$

• Отрицательное тепло

$$Q_{31} = A_{31} = -nRT_1 \ln 3$$

5) КПД

$$\eta = \frac{A_{\text{полн}}}{Q_{\text{н}}}$$

Полная работа цикла

$$A_{\text{полн}} = A_{12} + A_{23} + A_{31}$$

Т.к. $A_{23} = 0$, остается

$$A_{\text{полн}} = A_{12} + A_{31}$$

$$A_{\text{полн}} = 3,64 A_{31} + A_{31}$$

$$A_{\text{полн}} = (3,64 + 1) A_{31} = 4,64 A_{31}$$

• Переданное тепло

$$Q_{\text{н}} = Q_{12} = 8U_1 + 3,64 A_{31}$$

Т.к. $A_{31} = -nRT_1 \ln 3$, то

$$Q_{\text{н}} = 8U_1 - 3,64 nRT_1 \ln 3$$

• Подставим в КПД

$$\eta = \frac{A_{\text{полн}}}{Q_{\text{н}}} = \frac{4,64 A_{31}}{8U_1 - 3,64 nRT_1 \ln 3}$$

Вспомогательные U_1 через T_1

$$U_1 = \frac{1}{2} nRT_1$$

$$\eta = \frac{4,64 \cdot \frac{1}{2} nRT_1 \ln 3}{8 \cdot \frac{1}{2} nRT_1 - 3,64 nRT_1 \ln 3} = \frac{2,32 \ln 3}{4 - 3,64 \ln 3}$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-20

⑥ Расчет

Однолучевый газ $i=3$

$$\eta_{\text{одн}} = \frac{264 \cdot 1,0986}{4,3 - 364 \cdot 1,0986} = \frac{2,9023}{12,4002} = \frac{2,9023}{7,998} \approx 0,35$$

$$\eta_{\text{одн}} = 25\%$$

Двухлучевый газ $i=5$

$$\eta_{\text{двух}} = \frac{364 \cdot 1,0986}{4,5 - 364 \cdot 1,0986} = \frac{2,9023}{20,9002} = \frac{2,9023}{15,998} \approx 0,15$$

$$\eta_{\text{двух}} = 15\%$$

Ответ: $\eta_{\text{однолучевый}} = 25\%$; $\eta_{\text{двухлучевый}} = 15\%$

№8

Дано

$$D_p = -5 \text{ групп}$$

$$d_1 = 6$$

$$d_2 = 12$$

$$D_c = ?$$

Формула рассеивающей линзы:

$$f_p = \frac{1}{D_p} = \frac{1}{-5} = -0,2$$

Используем пропорцию подобия треугольников:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{1}{|f_p|}$$

Подставим числа

$$\frac{12}{6} = \frac{1}{0,2}$$

$$2 = \frac{1}{0,2}$$

$$L = 0,4 \text{ м} = 40 \text{ см}$$

Теперь ее заменим на собирающую, т.е. экран поставим на расстоянии 40 см, а лучи теперь фокусируются в этой точке

$$f_c = L = 40 \text{ см} = 0,0667 \text{ м}$$

Найдем оптическую силу

$$D_c = \frac{1}{f_c} = \frac{1}{0,0667} = 15 \text{ групп}$$

Ответ: $D_c = 15 \text{ групп}$