



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 57-08-16

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	12	13	—	10	10	7	—	64

Вариант 1

Задача 1

Пусть ~~цена колонны~~ — c , кол-во студентов (указано) — k .

тогда стоимость колонны перед тем, как ушли двое можно
выразить как c_k , а после — $(c+1000)(k-2)$. Цены равны.

$$c_k = (c+1000)(k-2)$$

$$c_k = c_k - 2c + 1000k - 2000$$

$$1000k = 2c + 2000$$

$$c = \frac{1000k - 2000}{2} = 500(k-2)$$

Знач, что колонна стоит целое ~~число~~ рублей, пусть ~~это~~ $c = 1000n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Тогда $n = \frac{1}{2}(k-2) = \frac{k}{2} - 1$. Так как $n \in \mathbb{Z}$ и $1 \in \mathbb{Z}$, $\frac{k}{2} \in \mathbb{Z}$. Пусть $k = 2m$.
Тогда $n = m-1$. Получается, что n — любое целое число от 8 до 20:

$$n=8 \Rightarrow c=8000 \Rightarrow m=9 \Rightarrow k=18 \Rightarrow 8000 \cdot 18 = 9000 \cdot 16. (=1000 \cdot 2^3 \cdot 3^2)$$

$$n=9 \Rightarrow c=9000 \Rightarrow m=10 \Rightarrow k=20 \Rightarrow 9000 \cdot 20 = 10000 \cdot 18. (=1000 \cdot 2^3 \cdot 5^2 \cdot 3)$$

$$n=20 \Rightarrow c=20000 \Rightarrow m=21 \Rightarrow k=42 \Rightarrow 20000 \cdot 42 = 21000 \cdot 40.$$

Математически цену колонны можно задать как $\{1000n | n \in \mathbb{Z}; 8 \leq n \leq 20\}$.

Ответ: любая цена, являющаяся целым количеством рублей, лежащая в промежутке от 8000 до 20000 рублей.

Выразим c_k . $k = 500(k-2) = c_k$ — цена колонны.

$$500k^2 - \frac{1}{2}k^2 - \text{цена} \text{ краски } 1000, \text{ пусть } x - \text{цена (с.р.)}$$

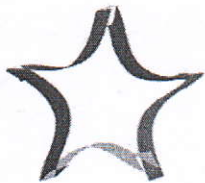
$$x = \frac{500k^2}{1000} - \frac{1000k}{1000} = \frac{1}{2}k^2 - k. \quad k \in \mathbb{Z} \text{ по усл.}, x \in \mathbb{Z} \text{ по усл.} \Rightarrow \frac{1}{2}k^2 \in \mathbb{Z}.$$

Тогда $k:2$, а поскольку $k \in \mathbb{Z}$, то и $k:2$. Пусть $k=2n$.
 $x = \frac{1}{2}2n^2 - 2n = 2(n^2 - n) = 2n(n-1)$. Небольшим перебором получим, что $\frac{1}{2}k^2 = 3 = 7 \cdot 1 = 12$,
т.е. при $n=2$, $x=4 \cdot 1=4 < 8$, а при $n=4$, $x=8 \cdot 3=24 > 20$.

Ответ: 12000

Handwritten signature

12



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 57-08-16

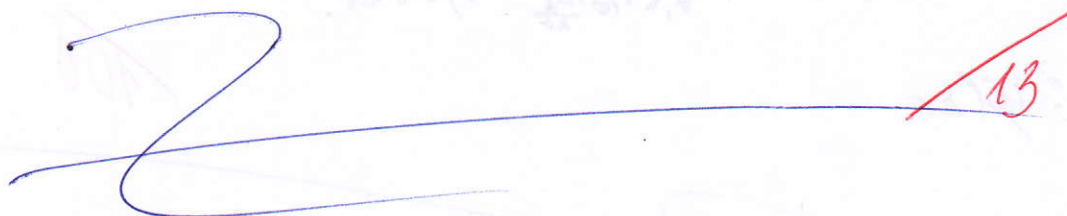
Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Задача 3.

Вариант 1

Если сторона перестроится в прямую, то её вершина лежит по равные стороны от этой прямой.  Если рассмотрим следующую вершину, сторона к ней тоже перестроится, и поскольку то, с какой стороны от прямой лежит предыдущая вершина уже известно, известно и то, с какой стороны лежит эта.  Пусть с одной стороны от прямой точки белые, с другой — чёрные. Переход через прямую меняет цвет точки; в переходе осуществляется на каждом ребре, потому цвета чередуются через 1.  Пусть все точки белыми — чёрные). Заметим, что если пол-во точек белую, то первая и последняя по чёрной стороне — белые. Но тогда будет, т.е. условие никогда не выполняется. Для чёрных точек вершина можно привести следующие примеры: ,  и т.д.

Ответ: а) да
б) нет.



13

Задача 7.

Дано:

$$F = 2 \text{ Н}$$

$$V = 1 \text{ л}$$

$$\rho_* = 1000 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho = ?$$

$$\vec{F}_{\text{арх}} = G V (\rho_* - \rho)$$

Так как тело в равновесии, $\vec{F}_{\text{арх}} = \vec{F} = 2 \text{ Н}$.

$\vec{F}$ прилагается к телу только вниз, поэтому $\vec{F} = -\vec{F}_{\text{арх}}$.

$$\vec{F}_{\text{арх}} = -\vec{F} = F = 2 \text{ Н}$$

$$G V (\rho_* - \rho) = 2 \text{ Н}$$

$$\rho_* = 1000 \text{ кг/м}^3 = 1 \text{ кг/л}$$

$$10 \text{ Н} \cdot 1 \text{ л} (1 \text{ кг/л} - \rho [\text{кг/л}]) = 2 \text{ Н}$$

$$10 \text{ Н} - (10 \text{ Н} \cdot 1 \text{ л} \cdot \rho [\text{кг/л}]) = 2 \text{ Н}$$

$$10 \text{ Н} \cdot 1 \text{ л} \cdot \rho [\text{кг/л}] = 8 \text{ Н}$$

$$\rho = 0,8 \text{ кг/л} = 800 \text{ кг/м}^3$$

Ответ: 800 кг/м^3 .

70

Задача 6.

Мощность нагрева плиты:

$$P_{\text{см}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$$m = \rho V = 1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 2 \text{ л} = 1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 2 \text{ кг}$$

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = 100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C} = 100^\circ\text{C} (\Leftrightarrow \text{К})$$

$$\Delta t = 10 \text{ мин} = 600 \text{ с}$$

$$P = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 2 \text{ кг} \cdot \frac{100^\circ\text{C}}{600 \text{ с}} = 1400 \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 1,4 \text{ кВт}$$

$$E = \lambda m$$

$$E = cmQ$$

$$E = m(\lambda + cQ), \text{ где } Q = 100^\circ\text{C, т.е. градусов по Кельвину от } 0^\circ\text{C}.$$

$$m = \frac{E}{\lambda + cQ}$$

$$E = P \cdot t = 1,4 \text{ кВт} \cdot 15 \text{ мин} = 1400 \frac{\text{Дж}}{\text{с}} \cdot 900 \text{ с} = 1,26 \text{ МДж}$$

$$m = \frac{1,26 \text{ МДж}}{3,3 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} + 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 100^\circ\text{C}} = \frac{1,26 \cdot 10^6 \text{ Дж}}{7,5 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = 1,68 \text{ кг}$$

Ответ: $1,68 \text{ кг}$.

100



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 57-08-16

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Задача 3.

Вариант 1

$$\rho_1 = 2000 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_2 = 4000 \text{ кг/м}^3$$

$$R = 2 \text{ см}$$

$$r = 1 \text{ см}$$

$$m_1/m_2 = ?$$

$$m = \rho V$$

$$V_{\text{цилиндра}} = S h$$

$$S_1 = \pi r^2 \text{ (внутр. часть)}$$

$$S_2 = \pi (R^2 - r^2) \text{ (внеш. часть)}$$

$$m_1 = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2$$

$$m_2 = \rho_1 V_2 + \rho_2 V_1 \quad (V_1 - \text{внутр.}; V_2 - \text{внеш.})$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{\rho_1 V_2 + \rho_2 V_1} = \frac{\rho_1 S_1 h + \rho_2 S_2 h}{\rho_1 S_2 h + \rho_2 S_1 h} = \frac{\rho_1 S_1 + \rho_2 S_2}{\rho_1 S_2 + \rho_2 S_1} = \frac{\pi (\rho_1 r^2 + \rho_2 (R^2 - r^2))}{\pi (\rho_1 (R^2 - r^2) + \rho_2 r^2)} =$$

$$= \frac{\rho_1 r^2 + \rho_2 (R^2 - r^2)}{\rho_1 (R^2 - r^2) + \rho_2 r^2} = \frac{r^2 (\rho_1 - \rho_2) + \rho_2 R^2}{r^2 (\rho_2 - \rho_1) + \rho_1 R^2}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1^2 \cdot (-2000) + 4000 \cdot 4}{1^2 \cdot (4000 - 2000) + 2000 \cdot 4} = \frac{-2000 + 16000}{2000 + 8000} = \frac{14000}{10000} = 1,4$$

Ответ: $m_1/m_2 = 1,4$

Задача 4.

Заметим следующее. $a^n \bmod 10$: $4 \rightarrow 6$. Рассмотрим от значения степени четвёрки на то равно ли при нечётной степени, 6 при чётной; при этом 4 при переходе от 4 к 6 в 10^k старший разряд уходит в 1 , а $6 \rightarrow 4$.

105

2