

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	125	125	135	135	105	105	150	150	1000

Вариант 2

Стр. 1 из 6

№1

a — цена копилки, n — кол-во студентов.

Каждая копия: $\frac{a}{n}$, копии без 2: $\frac{a}{n-2}$ ($n \geq 3$).

$$\frac{a}{n-2} - \frac{a}{n} = 1000.$$

$$an - a(n-2) = 1000n(n-2) \Rightarrow a = 500n(n-2).$$

т.к. $f(n) = n(n-2)$ — монотонно возрастающая функция
($f(n) = n^2 - 2n$, $f'(n) = 2n - 2 > 0$, при $n \geq 3$), то при $n \geq 6$,
 $n(n-2) \geq 24 \Rightarrow a \geq 500 \cdot 24 = 12000$, но $a \leq 10000$.

$$\text{при } n=3: a = 500 \cdot 3 \cdot 1 = 1500 < 3000.$$

$$n=4: a = 500 \cdot 4 \cdot 2 = 4000$$

$$n=5: a = 500 \cdot 5 \cdot 3 = 7500 \text{ — нецелое число тысяч рублей.}$$

Ответ: 4000 рублей

№2

т.к. мы вычеркиваем одно и то же число цифр, значит всегда
будем получать числа одинаковой длины, значит для максимизации
числа нужно максимизировать его первую цифру. Докажем, что число
не может начинаться с 5-значных "9". 5-ая 9 в числе 49 (9, 19, 29, 39, 49) до числа 49
числа $8(1 \dots 8) + 2 \cdot 39(10 \dots 48) + 1(49)$ — цифр в скобках полные
 ~~$8 + 78 + 1 = 87 > 81 \Rightarrow$ с 5 разрядом число не может начинаться.~~
Таким же 5-ой цифрой не может быть 8, т.к.
 ~~$8 + 2 \cdot 38(10 \dots 47) + 1(48) =$~~

Прямая до первого пересечения будет за многоугольником, после первого внутри, после второго за и т.д., значит, после каждого четного пересечения прямая будет в многоугольнике, но т.к. многоугольник конечный, то прямая должна "выйти" из него $\Rightarrow$ четного кол-во пересечений не бывает.

№4

В числе $7^{2024} - \leq 2024$ знаков (т.к. $7 < 10$), значит, его сумма цифр $\leq 2024 \cdot 9$, в числе $\leq 2024 \cdot 9$, знаков ≤ 5 ($2024 \cdot 9$ - 5-ти значное число), значит его сумма цифр $\leq 5 \cdot 9 = 45$. У числа ≤ 45 - 2 знака $\Rightarrow$ сумма цифр ≤ 18 . Не трудно убедиться, что ни у какого числа ≤ 18 не будет значной суммы цифр (1, 2, 3, 4, 5, ..., 9, $1+0=1$, $1+1=2$, $1+3=4$, ..., $1+8=9$). Значит, 5-ое число - это 1 цифра, т.к. остаток по mod 9, сохранился (т.к. $a \equiv_9$ со своей суммой цифр), то найдем цифру по остаток 7^{2024} по mod 9. По теореме Ферма: $\varphi(9) = 6 \Rightarrow a^6 \equiv_9 1$, если $\text{НОД}(a, 9) = 1$, т.к. $\text{НОД}(7, 9) = 1$ ч. $2024 \equiv_6 2$, то $7^{2024} \equiv_9 7^2 \equiv_9 49 \equiv_9 4 \Rightarrow$ 5-ое число - 4.

Ответ: 4.

№5

Пусть, длина провода - l . Тогда $V_{\text{внутр.}} = l \cdot \pi r^2$ (длина на площадь сечения). $V_{\text{внеш.}} = l \cdot \pi R^2 - V_{\text{внутр.}} = l \pi (R^2 - r^2)$.

Тогда, $m_1 = \rho_1 \cdot V_{\text{внутр.}} + \rho_2 \cdot V_{\text{внеш.}} = l \pi (r^2 \rho_1 + (R^2 - r^2) \rho_2)$,
Стр. 3 из 6

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Стр 2 из 6

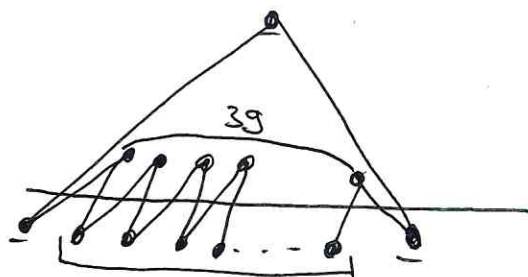
8 + 2 · 39 + 1 = 8 + 78 + 1 = 87 цифр из которых мы остави-
ли 9, 87 - 9 = 78. Если 5-ая цифра - 8, то
(19, 29, 39)

потребуется на 2 цифры меньше (вместо 2-39 (10..48) → 2-38 (10..47)
но 84 - 2 = 82 > 81, значит 5-ая цифра ≤ 7, и у нас
Ответ: ~~99992~~ останется ещё 1 зачеркивание, значит
след. (6-ая цифра) ≤ 8 (т.к. мы можем зачеркнуть 4
в 48, и тогда 6-ая цифра - 4).

Ответ: 9999 7 8 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63
64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81.

№3

а) Да, существует:



39 + 38 + 1 + 1 + 1 = 80. Поставим 3 вершины 1 соединим с двумя
другими, а две оставшиеся будем соединять с новыми, отрезки
должны идти под одним углом и быть равными друг
другу.

б) Нет, нельзя.

$$m_2 = \rho_2 V_{\text{внутр}} + \rho_1 \cdot V_{\text{внеш}} = \pi (r^2 \rho_2 + (R^2 - r^2) \rho_1).$$

$$r^2 = \left(\frac{1}{4} \text{ см}\right)^2 = \frac{1}{16} \text{ см}^2; \quad R^2 - r^2 = 1 \text{ см}^2 - \frac{1}{16} \text{ см}^2 = \frac{15}{16} \text{ см}^2$$

$$\rho_1 = 1500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 1,5 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}; \quad \rho_2 = 6 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

$$m_1 = \pi \left(\frac{1}{16} \text{ см}^2 \cdot 1,5 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} + \frac{15}{16} \text{ см}^2 \cdot 6 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right) = \pi \left(\frac{1,5}{16} \frac{\text{г}}{\text{см}} + \frac{90}{16} \frac{\text{г}}{\text{см}} \right) = \pi \cdot \frac{91,5}{16}$$

$$m_2 = \pi \left(\frac{1}{16} \cdot 6 + \frac{15}{16} \cdot 1,5 \right) = \pi \cdot \frac{28,5}{16}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\pi \cdot \frac{91,5}{16}}{\pi \cdot \frac{28,5}{16}} = \frac{91,5}{28,5} = \frac{915}{285} = \frac{183}{57} = \frac{61}{19}.$$

№6.

Пусть, мощность плиты - P , тогда (V - объем воды, $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$)
 $P \cdot 12 \text{ мин} = c_v (\rho V) \cdot (100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}) = 1 \frac{\text{кДж}}{\text{н}}$

$$P = \frac{c_v \cdot \rho V \cdot 100^\circ\text{C}}{12 \text{ мин}} = \frac{4200 \cdot 3 \text{ кг} \cdot 100^\circ\text{C}}{12 \text{ мин}} = 105000 \frac{\text{Дж}}{\text{мин}}$$

Пусть, масса льда - $m_{\text{л}}$, тогда, чтобы превратить лед в воду нагретую до 100°C , сначала расплавить его, а потом нагреть:

$$P \cdot 15 \text{ мин} = \lambda m_{\text{л}} + c_v m_{\text{л}} \cdot 100^\circ\text{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{\text{л}} = \frac{P \cdot 15 \text{ мин}}{\lambda + 100^\circ\text{C} \cdot c_v} = \frac{105000 \cdot 15}{330000 + 420000} = \frac{105000 \cdot 15}{750000} =$$

$$= \frac{105 \cdot 15}{750} = \frac{105}{50} = 2,1 \text{ кг}$$

стр. 4 из 6.

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Стр 5 из 6



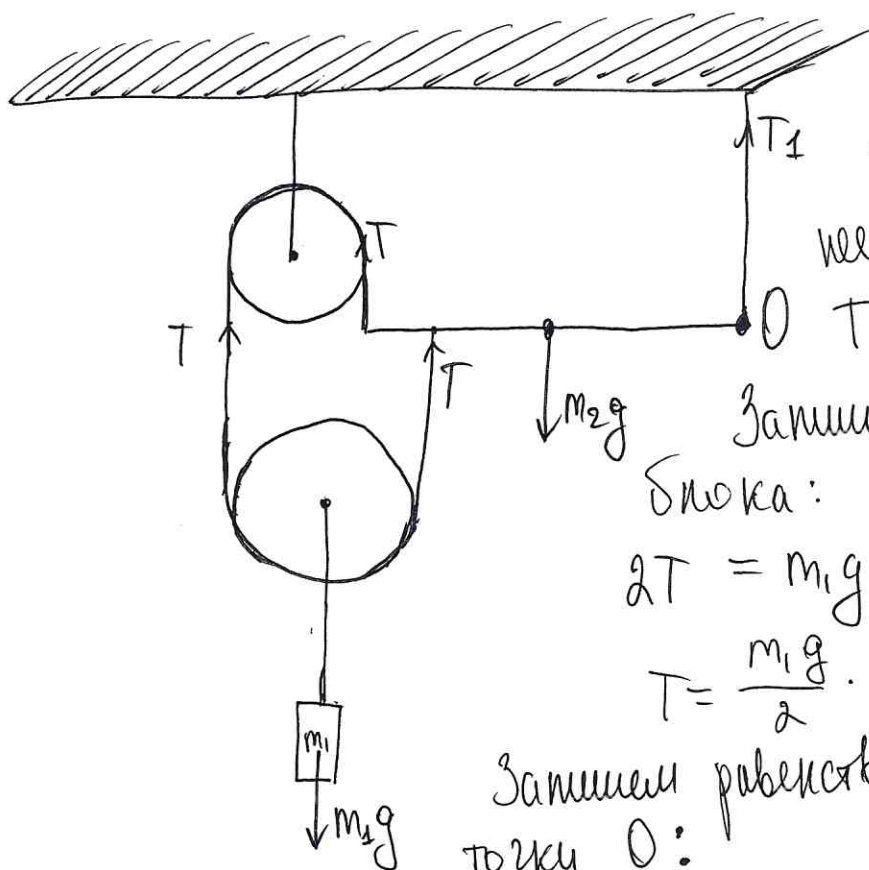
$F + mg = F_{Arch}$. $F_{Arch} = \rho_m g V$ (т.к. тело погружено полностью, то $V_{погр.} = V$), $m = \rho_T V$, $\rho_m = 1000 \frac{кг}{м^3} = 1 \frac{кг}{л}$.

$$F + \rho_T V g = \rho_m g V.$$

$$\rho_T - \rho_m - \frac{F}{Vg} = 1 \frac{кг}{л} - \frac{5 Н}{1 л \cdot 10 Н/кг} =$$

$$= 1 \frac{кг}{л} - \frac{1}{2} \frac{кг}{л} - \frac{1}{2} \frac{кг}{л} = 0,5 \frac{кг}{л} = 500 \frac{кг}{м^3}.$$

№8



Т.к. нить вокруг блоков одна и та же, то у нее одна сила натяжения. Т.ч. правой - T_1 .

Запишем равенство для блока:

$$2T = m_1 g \quad (2T - \text{вверх, } m_1 g - \text{вниз})$$

$$T = \frac{m_1 g}{2}.$$

Запишем равенство моментов относительно точки O:

$$\frac{l}{2} m_2 g + (l - s) T = l T \quad (m_2 g \text{ и } T \text{ против часовой, } T \text{ по часовой вращают т.ч.})$$

$$\frac{l}{2} m_2 g + lT - sT = lT$$

$$\frac{l}{2} m_2 g = sT$$

$$\frac{l}{2} m_2 g = s \cdot \frac{m_1 g}{2}$$

$$lm_2 = sm_1 \Rightarrow m_1 = \frac{lm_2}{s} = \frac{50}{10} \cdot 2 \text{ кг} = 10 \text{ кг}.$$

Ответ: $m_1 = 10 \text{ кг}$

СТР 6 уз 6