

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 58-09-01

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	12	13	13	5	10	15	6	86

Вариант 2

N1

$$\begin{cases} x^2 + 2 = (y+z)^2 \\ y^2 + 1 = (x+z)^2 \\ z^2 + 1 = (x+y)^2 \end{cases}$$

перекрестно
к квадратам
61 сторону
 $\Rightarrow$
и разность
к квадратам
закасаются

$$\begin{cases} 2 = (x+y+z)(y+z-x) \quad (1) \\ 1 = (x+y+z)(x+z-y) \quad (2) \Rightarrow x+y+z \neq 0 \\ 1 = (x+y+z)(x+y-z) \quad (3) \end{cases}$$

① делим на ② $\Rightarrow 2 = \frac{y+z-x}{x+z-y}$ т.к. $x+y+z \neq 0$ можно сократить

$\Rightarrow 2x + 2z - 2y = y + z - x \Rightarrow 3x - 3y + z = 0$

② делим на ③ $\Rightarrow 1 = \frac{x+z-y}{x+y-z} \Rightarrow x+y-z = x+z-y \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y=z}$ подставляем

$0 = 3x - 3y + z = 3x - 3y + y \Rightarrow 2y = 3x \Rightarrow z = y = 1,5x$

подставляем в исходное уравнение

$x^2 + 2 = (y+z)^2 = (1,5x + 1,5x)^2 = 9x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{1,25} = \frac{4 \cdot 2}{5} = \frac{8}{5} \Rightarrow$

$x = \pm \sqrt{\frac{8}{5}} \Rightarrow$ дресс. 1 серия $(x; y; z) = \left(\sqrt{\frac{8}{5}}; 0,75 \cdot \sqrt{\frac{8}{5}}; 0,75 \cdot \sqrt{\frac{8}{5}} \right)$

и такая же, но с минусами, но по условию $x, y, z \geq 0$
 $\Rightarrow$ единств. реш.

Ответ: $x = \sqrt{\frac{8}{5}}, y = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\frac{8}{5}};$

Подставим в исходное уравнение: $x^2 + 2 = (y+z)^2 = 9x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$ т.к. $x, y, z \geq 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{1,5}{2} = z$

Ответ: $(x; y; z) = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{3}{4} \right)$

№2 Пусть первый кассир за одёга одолужил $0,75x$; а второй x

А после этого 1,2 у - первый / у - второй

Запишем ур-ние Итого у нас

$$\underbrace{1,1(y+x)}_{(10\% \text{ второго каска}} = \underbrace{1,2y + 0,75x}_{\text{стоимость первого одноклупа}} = 8$$

$\Rightarrow 0,1y = 0,35x \Rightarrow y = 3,5x$ подставим в изначальные ур-ние:

Известно, что: 1 день

1 день	$\frac{3}{4} \times$	и	$\times$	$\Rightarrow$
2 день	$\frac{6}{5} \cdot \frac{4}{2} \times$	и	$\frac{4}{2} \times$	
	$\frac{21}{5} \times$			

поскольку людей из кабины в лодочный день отсутствует натуральное
число пассажиров $\Rightarrow \frac{21}{5}x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \div 5$

$$\frac{3}{4}x \in \mathbb{N} \Rightarrow x:4 \Rightarrow x:20 \Rightarrow x \geq 20$$

Но постигает сумму: $0,45x + x + 3,5x + 4,2x = 9,45x$

$\Rightarrow$ ~~при $x \geq 7$~~ $x: 20$ при $x \geq 40$: $9,45x \geq 9,45 \cdot 40 = 378 > 250$

противоречие
т.к. число
ищущих по
условию
 ≤ 250

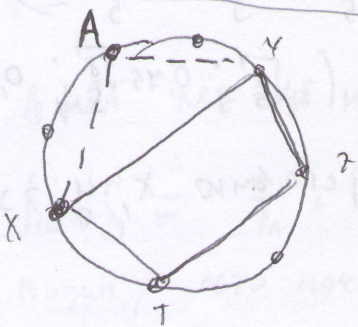


$x=20$ Только Δ проверит: $9,45x = 9,45 \cdot 20 = 189$ условно < 250

5

первий касир одсужен

$$0,75x + 4,2x = \frac{3}{4} \cdot 20 + \frac{21}{5} \cdot 20 = 15 + 84 = 99 \text{ покупателей}$$



сохраняется $\Rightarrow$ каждому многоуг. без A мы можем сопоставить свой уникальный с точкой A .

но заметим, чтобы построить обратное соответствие, если многоугольник
 с точкой $A \geq 4$ вершины, то все хорошо, мы удаляем
 точку A и как бы показавшиеся вершинам выдвинутым сопоставляем
 на выпуклый многоугольник $\Rightarrow$ значит но если Y на Δ треугольнике
 с вершиной в точке A , то он никак соответствует многоугольнику

$\Rightarrow$ многоугольников с точкой A больше на число треугольников
 с точкой A , т.е. C_{2024}^2 (выбрать 2 вершины из 2024 оставшихся)
 " $\frac{2024 \cdot 2023}{2}$

Ответ: с точкой A больше на C_{2024}^2

N 4 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ так f имеет 3 корня запишем f по Виету:
 $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$; $g(x) = x^2 + 4x + 2024$
 поскольку $f(g(x))$ не имеет корней перепишем
 в таком виде:

$$f(g(x)) = (x^2 + 4x + 2024 - x_1)(x^2 + 4x + 2024 - x_2)(x^2 + 4x + 2024 - x_3)$$

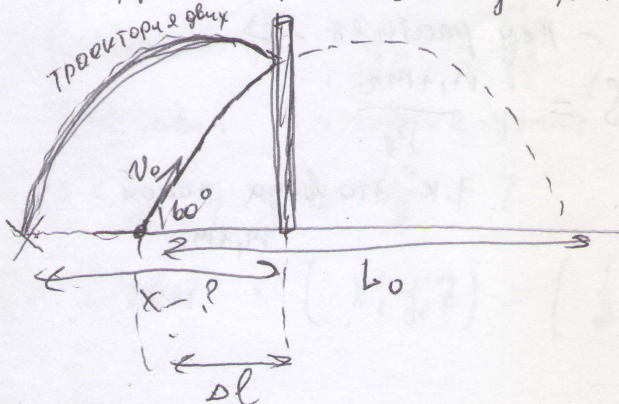
т.к. $f(g(x))$ не имеет корней следовательно в каждой из скобок нет
 корней $\Rightarrow$ в $x^2 + 4x + 2024 - x_i \nless 0 < 0 \Rightarrow 4^2 - 4(2024 - x_i) < 0$
 $\Rightarrow \boxed{4 < 2024 - x_i}$

Заметим: $f(2024) = (2024 - x_1)(2024 - x_2)(2024 - x_3) >$

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ ЧТО.

N 5 поскольку удар абсолютно упругий, скорость $\Rightarrow$

Траектория его движения просто симметрична относительно стены:



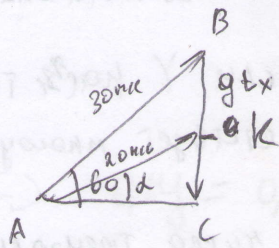
Заметим, что шарик принимает значения
 скорости 2011 в 2-ух точках.

поэтому будет 2-варианта ответа

Формула дальности пути $L_0 = \frac{\sin(2\alpha) v_0^2}{g}$

$$\Downarrow l_0 = \frac{\sin(60^\circ) \cdot (30)^2}{10} = 90 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ метров} = 45\sqrt{3} \text{ м.}$$

найдем, чему равно Δl : Картина Δ стороны!



$$AC = \cos 60^\circ \cdot 30 = \cos \alpha \cdot 20$$

$$\Downarrow \cos \alpha = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$\Downarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\Downarrow gtx = BC - KC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 30 - \sin \alpha \cdot 20 = 45\sqrt{3} - \frac{\sqrt{7} \cdot 5}{2}$$

$$tx = \frac{15\sqrt{3} - 5\sqrt{7}}{10} \text{ секунд.}$$

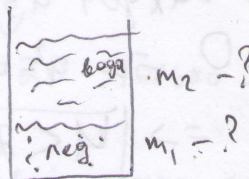
$$\Downarrow \Delta l = \text{расстояние которое проедет вправо} = \cos 60^\circ \cdot tx \cdot 30 \text{ м/с} = \frac{15}{10} (15\sqrt{3} - 5\sqrt{7})$$

$$\Downarrow \text{расстояние которое он проехал влево} = l_0 - \Delta l = 45\sqrt{3} - \frac{3}{2} (15\sqrt{3} - 5\sqrt{7})$$

$$\Downarrow X = \left| \underbrace{l_0 - \Delta l}_{\text{расстояние влево}} - \underbrace{\Delta l}_{\text{вправо проехал}} \right| = \left| 45\sqrt{3} - 45\sqrt{3} + 15\sqrt{7} \right| =$$

$$= 15\sqrt{7} \text{ метров}$$

№ 6

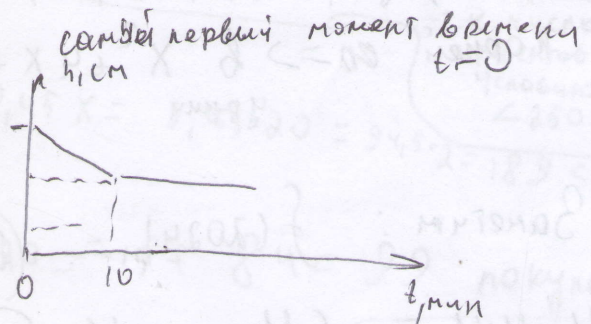


так рассмотрим

$$h_0 = 120$$

$$h_1 = 115$$

$$110$$



В лёд ещё не успел растаять $\Rightarrow$ объём жидкости считается как в сосуде

$$h_0 \cdot S = \frac{m_1}{\rho_n} + \frac{m_2}{\rho_v}$$

Видим, что начиная с $t = 10 \text{ мин}$ - лёд растаял $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Всё вещество это вода} \Rightarrow h_1 S = \frac{m_1 + m_2}{\rho_v}$$

т.к это вода массой $m_1 + m_2$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 52-09-01

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Решаем эту систему: $\Rightarrow m_1 + m_2 = h_1 S \cdot \rho_B \Rightarrow m_1 + m_2 = 15 \text{ см} \cdot 115 \text{ см} \cdot 1 \frac{2}{\text{см}^3} = 1725 \text{ грамм}$ ①

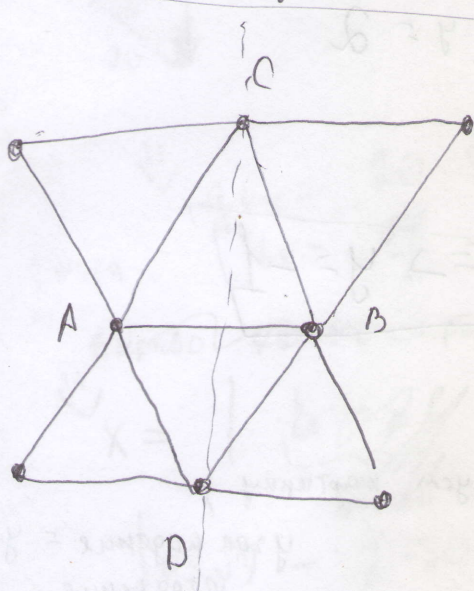
$$\text{или } m_1 + m_2 = 120 \cdot 15 = 1800 \text{ см}^3 \cdot 0,92 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$$

$$\text{② } m_1 + m_2 \cdot 0,92 = 1620 \text{ грамм} \quad \text{из ① выч ②}$$

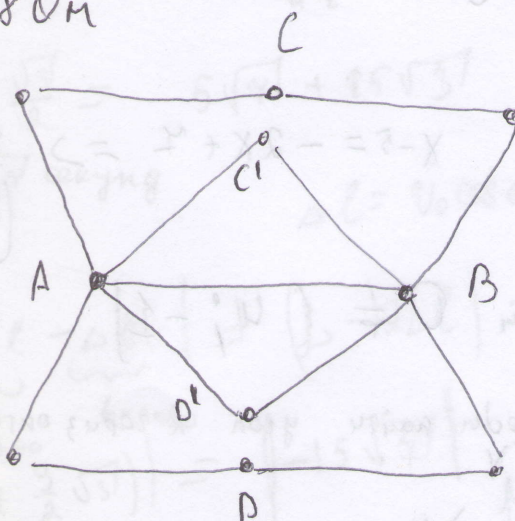
$$0,1 m_2 = 1725 - 1620 = 105 \text{ грамм}$$

$$\boxed{m_2 = 1050 \text{ грамм}} \Rightarrow \boxed{m_1 = 1725 - 1050 = 675 \text{ грамм} = 1050 \text{ г}}$$

N 7



$R = 8 \text{ Ом}$



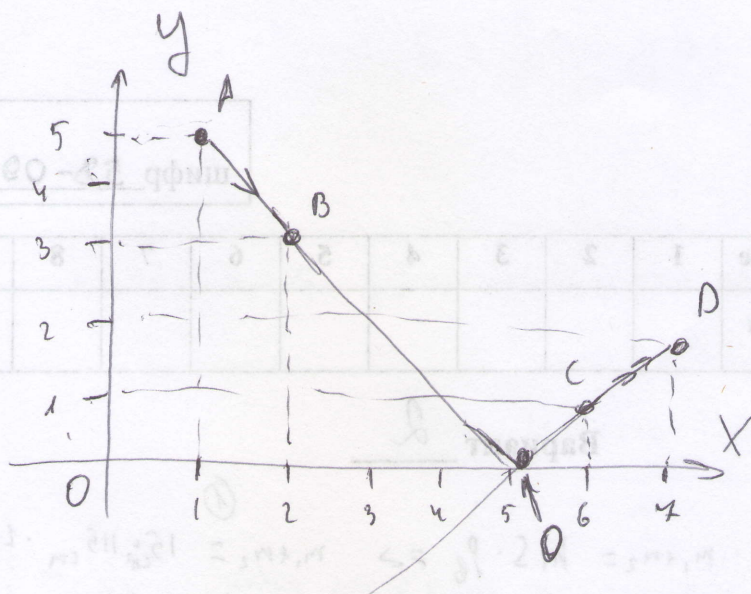
Видим в схеме симметрию относительно $CD \Rightarrow$ можем прямо разорвать в точках C и D цепь (см справа), ветви точки C и C' и D и D' имеют одинаковые потенциалы из симметрии

Или А это элементарное параллельное соединение:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{4R} + \frac{1}{4R} = \frac{2}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{2,5}{R} \Rightarrow R_{AB} = \frac{R}{2,5}$$

$$R_{AB} = \frac{8}{2,5} = \frac{8 \cdot 2}{5} = \frac{16}{5} \text{ Ом} = 3,2 \text{ Ом}$$

18



Очевидно, луч отразится на поверхности зеркала $\Rightarrow$ составим уравнение
прямых AB и CD по 2-м точкам и найдём точку пересечения O .

AB: $y = -2x + 7$ в точке 1 прикидывает 5
в точке 2 прикидывает 3

CD: $y = x - 5$ в точке 6 $y = 1$
в точке 7 $y = 2$

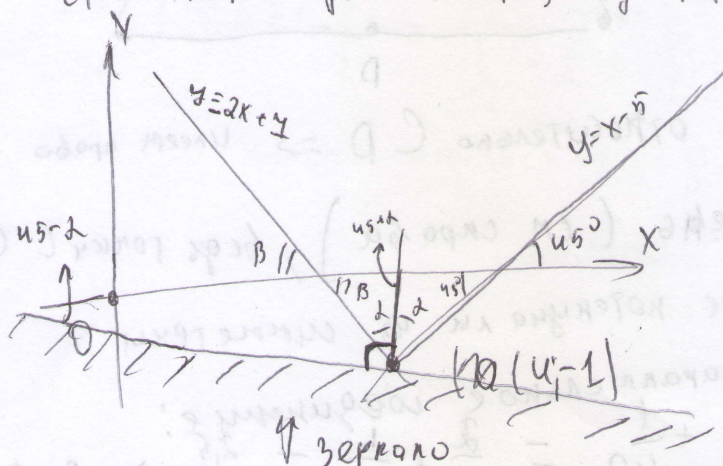
$\Downarrow$

$$x - 5 = -2x + 7 \Rightarrow 3x = 12$$

$$\boxed{x = 4 \Rightarrow y = -1}$$

координаты $O \neq (4; -1)$

чтобы найти угол к горизонту нарисуем картинку;



угол падения = угол

отражения
восстановим дисс.
и нормаль к ней

т.к. $\tan \alpha = 1$ значит также угол
наклона
прямой $y = x - 5$

$$\tan \alpha = 1$$

$$\Downarrow$$

$\alpha = 45^\circ$
отметим

В свою очередь $\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{1} = 2$

$\Rightarrow \arctg(2) = \beta$

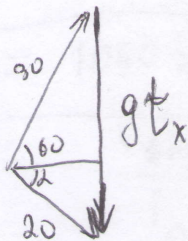
Тогда угол зеркала к горизонту равен $45^\circ - \alpha$

но $2\alpha + \beta + 45^\circ = 180$

$$\alpha = \frac{135 - \arctg(2)}{2}$$

Ответ: угол зеркала к горизонту равен $45 - \left(\frac{135 - \arctg(2)}{2} \right)$

В задании №5 рассмотрим ^{Второй} случай, когда $V = 20 \text{ м/с}$ и тело падает
Тогда Δ скоростей выглядит примерно



Точно также $\cos \alpha \cdot 20 = \cos 60^\circ \cdot 30$

$\cos \alpha = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\Rightarrow g t_x = 20 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + 30 \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{7} + 15\sqrt{3}$

Тогда: $t_x = \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{3}{2} \sqrt{3}$ секунд

$\Delta l = v_0 \cos 60^\circ \cdot t_x$

~~Вправо камень пролетит~~

$\Rightarrow x = \left| \underbrace{L - \Delta l}_{\text{вправо}} - \underbrace{\Delta l}_{\text{вправо}} \right| = (L - 2\Delta l) =$

$= \left| 45\sqrt{3} - 2 \cdot 30 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{3}{2} \sqrt{3} \right) \right| = \left| -15\sqrt{7} \right| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ на $15\sqrt{7}$, но с другой стороны прилетит камень

Ответ: $15\sqrt{7}$ метров, развешивать