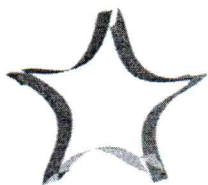


11-08-916



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 63-11-83

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	9	13	10	—	10	10	12	15	79

Вариант 1

N5:

Доказать

m, q, h, b, e

t?

N1:

$$9\sqrt{2 - \log_2 x} - 2|4\log_2 x - 7| \leq 9\log_2 x - 2|4\sqrt{2 - \log_2 x} - 7|$$

$$9\sqrt{2 - \log_2 x} + 2|4\sqrt{2 - \log_2 x} - 7| \leq 9\log_2 x + 2|4\log_2 x - 7|$$

$$f(\sqrt{2 - \log_2 x}) \leq f(\log_2 x), \text{ где } f(h) = 9h + 2|4h - 7|$$

$$f(h) = \begin{cases} 17h - 14, & h \geq \frac{7}{4} \\ h + 14, & h < \frac{7}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow \text{г.к. } \underline{\text{обе функции возрастающие и непрерывные, то:}}$$

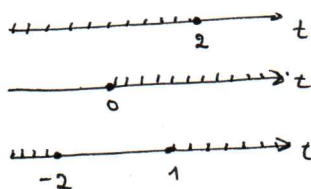
ОДЗ?

а ф-ция?

$$\sqrt{2 - \log_2 x} \leq \log_2 x, \text{ пусть } \log_2 x = t, \text{ тогда:}$$

$$\sqrt{2 - t} \leq t$$

$$\begin{cases} 2 - t \geq 0 \\ t \geq 0 \\ 2t \leq t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq 2 \\ t \geq 0 \\ t^2 + t - 2 \geq 0 \end{cases}$$



$$1 \leq t \leq 2$$

$$1 \leq \log_2 x \leq 2$$

$$2 \leq x \leq 4$$

Ответ: $x \in [2; 4]$.

N3:

$$f(x) = ax^2 + (a+1)x + b$$

Если функция $f(x)$ принимает неотриц. значения для всех x , тогда справедливы следующие условия:

$$\begin{cases} a > 0 \\ D \leq 0 \end{cases}$$

a=0? потому не так

После наименьшее значение выражения $2a+b+1=h$

$$b = h - 2a - 1$$

$$D = (a+1)^2 - 4ab = (a+1)^2 - 4a(h-2a-1)$$

$$D = a^2 + 2a + 1 + 8a^2 + 4a - 4ah = 9a^2 + 6a + 1 - 4ah = (3a+1)^2 - 4ah$$

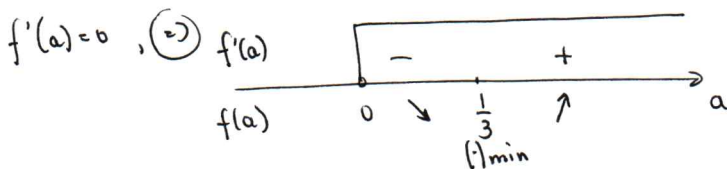
$$(3a+1)^2 - 4ah \leq 0$$

$$h \geq \frac{(3a+1)^2}{4a}$$

Запишем функцию $f(a) = \frac{(3a+1)^2}{4a}$, и тогда найти мин. h можно найти точку минимума $f(a)$.

$$f'(a) = \frac{3 \cdot 2(3a+1) \cdot 4a - 4(3a+1)^2}{16a^2} = \frac{4(6(3a+1)a - (3a+1)^2)}{16a^2} = \frac{(3a+1)(6a-3a-1)}{4a^2} = \frac{(3a+1)(3a-1)}{4a^2}$$

Корень $a = -\frac{1}{3}$ не подходит, так как $a > 0$.



Т.к. $x = \frac{1}{3}$ - единственная точка минимума на $a \in (0; +\infty)$, то в ней достигается наименьшее значение $f(a)$.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4 \cdot 3}{4} = 3$$

6-?

$$h \geq 3 \Rightarrow h_{\min} = 2a + b + 1 = 3$$

Ответ: $h_{\min} = 3$.

№6:

$$C = 200 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$R_1 = 10 \text{ Ом}$$

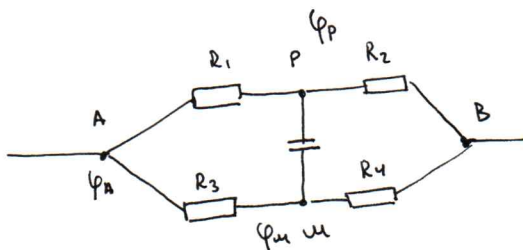
$$R_2 = 20 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 30 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 40 \text{ Ом}$$

$$U_0 = 210 \text{ В}$$

$q = ?$



Поскольку спустя достаточно большое время после подключения источника конденсатор зарядится, ток по нему перестанет течь.

$$I_1 = I_2 = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

$$\varphi_P - \varphi_A = I_1 \cdot R_1$$

$$I_3 = I_4 = \frac{U_0}{R_3 + R_4}$$

$$\varphi_M - \varphi_A = I_3 \cdot R_3$$

$$\begin{cases} \varphi_P - \varphi_A = \frac{U_0 R_1}{R_1 + R_2} & (1) \\ \varphi_M - \varphi_A = \frac{U_0 R_3}{R_3 + R_4} & (2) \end{cases}$$

$$(2) - (1): \varphi_M - \varphi_P = U_0 \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$$

U_C - напряжение конденсатора

$$C = \frac{q}{U_C} = \frac{q}{\varphi_M - \varphi_P}$$

$$U_C = \varphi_M - \varphi_P$$

$$q = C(\varphi_M - \varphi_P) = C \cdot U_0 \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = 200 \cdot 10^{-6} \cdot 210 \left(\frac{30}{30+40} - \frac{10}{10+20} \right) = 200 \cdot 10^{-6} \cdot 210 \cdot \frac{2}{21} \quad (10) \quad (1)$$

$$\Rightarrow 200 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 4000 \cdot 10^{-6} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Кл} = 4 \text{ мКл}$$

Ответ: $q = 4 \text{ мКл}$.

11-08-416



N7:

$$T = KV^2$$

$$V_2 = V_3 = 2V_1$$

$$|A_{12}| = 2,16 |A_{31}|$$

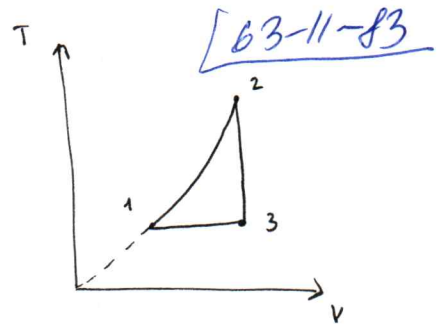
 η - ?

$$\eta = \frac{A}{Q_n}$$

$$1-2: pV = \nu R \bar{T}$$

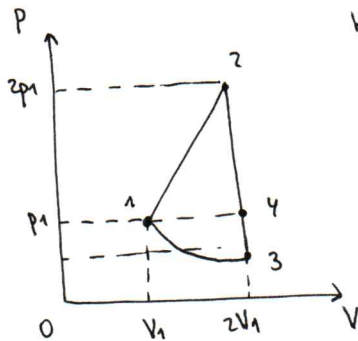
$$pV = \nu R KV^2 \Rightarrow p = \nu R KV, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_2 = 2p_1$$



$$2-3: V = \text{const}, p_3 = p_1$$

$$3-1: T = \text{const}, V_3 = 2V_1$$



Нарисуем график в координатах pV , как показано на рис.

$$A = A_{1241} + A_{1431}$$

$$A_{1241} = \frac{p_1 + 2p_1}{2} \cdot (2V_1 - V_1) = \frac{3}{2} p_1 V_1 = \frac{3}{2} \nu R \bar{T}_1$$

$$A_{1431} = \frac{A_{1241}}{2,16} = \frac{\frac{3}{2} \nu R \bar{T}_1}{2,16} \approx 0,693 \nu R \bar{T}_1 - \text{работа в изотермич. процессе}$$

$$A = \frac{3}{2} \nu R \bar{T}_1 + 0,693 \nu R \bar{T}_1 \approx 2,193 \nu R \bar{T}_1$$

$$Q_n = \Delta U_{12} + A_{12}, \quad A_{12} = \frac{p_1 + 2p_1}{2} \cdot (2V_1 - V_1) = \frac{3}{2} p_1 V_1 = \frac{3}{2} \nu R \bar{T}_1$$

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} \nu R (T_2 - T_1) = \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{i}{2} \cdot (2p_1 \cdot 2V_1 - p_1 V_1) = \frac{i}{2} (4p_1 V_1 - p_1 V_1) = \frac{3i}{2} \cdot p_1 V_1 = \frac{3i}{2} \cdot \nu R \bar{T}_1$$

$$Q_n = \frac{3i}{2} \nu R \bar{T}_1 + \frac{3}{2} \nu R \bar{T}_1 = \frac{3}{2} \nu R \bar{T}_1 (i+1)$$

$$\eta = \frac{2,193 \nu R \bar{T}_1}{\frac{3}{2} \nu R \bar{T}_1 (i+1)} = \frac{2,193}{\frac{3}{2} \cdot (i+1)}$$

1. Если газ азотистый (изопропанол), то $i=3$, тогда:

$$\eta = \frac{2,193 \cdot 2}{9} = \frac{2,193}{6} \approx 0,3655$$

3. Если газ инертный, то $i=6$:

$$\eta_3 = \frac{2,193}{\frac{3}{2} \cdot 7} \approx 0,209$$

2. Если газ азотистый, то $i=5$:

$$\eta_2 = \frac{2,193}{9} \approx 0,2437$$

- Ответ:
- 1) если $i=3$: $\eta_1 = 0,3655$
 - 2) если $i=5$: $\eta_2 \approx 0,2437$
 - 3) если $i=6$: $\eta_3 \approx 0,209$.

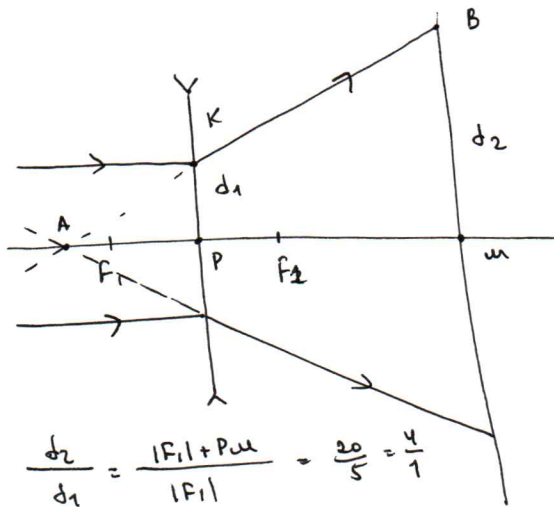
N8:

$$D_p = -4 D_{nmp}$$

$$d_1 = 5 \text{ см}$$

$$d_2 = 20 \text{ см}$$

$D_c = ?$



$$\frac{MB}{PK} = \frac{AM}{AP} \Rightarrow \frac{d_2}{d_1} = \frac{|F_1| + PM}{|F_1|} = \frac{20}{5} = 4$$

$$|F_1| = \frac{1}{1/D_p} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ м}$$

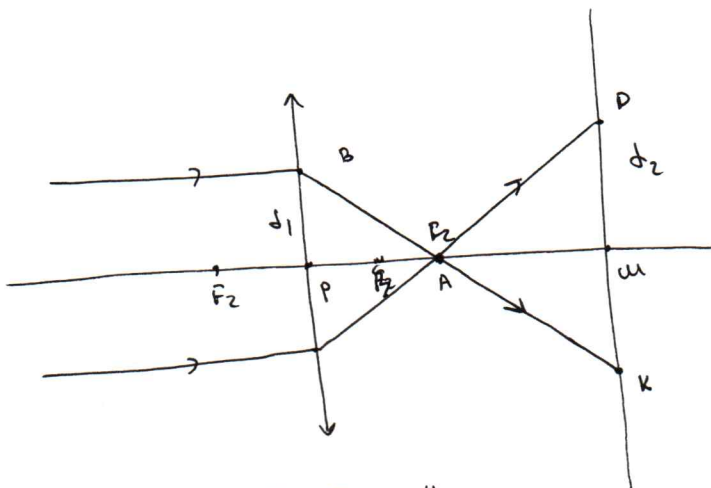
Р-м $\triangle APK$ и $\triangle AMB$
 $\angle K = \angle B$ (т.к. $KP \parallel MB$)
 $\angle A$ - общий

$\Rightarrow \triangle APK \sim \triangle AMB$ (по 2 углам)

$$\frac{AP}{AM} = \frac{PK}{MB}, \text{ где } AP = |F_1|, AM = |F_1| + PM, PK = \frac{d_1}{2}, MB = \frac{d_2}{2}$$

$$4|F_1| = |F_1| + PM$$

$$3|F_1| = PM \Rightarrow PM = 3 \cdot \frac{1}{4} = 0,75 \text{ м} = 75 \text{ см}$$



$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{PM - F_2}{F_2} = \frac{4}{1}$$

$$4F_2 = PM - F_2$$

$$5F_2 = PM \Rightarrow$$

$$F_2 = \frac{PM}{5} = \frac{0,75}{5}$$

$$\Rightarrow D_c =$$

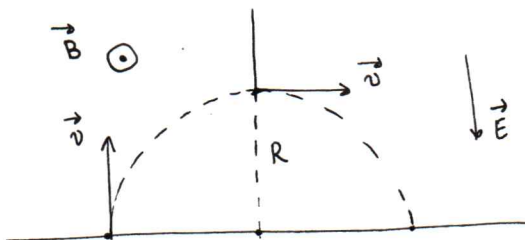
$$\frac{1}{F_2} = \frac{5}{0,75} \approx 6,67 \text{ дптр}$$

Ответ: $D_c \approx 6,67 \text{ дптр}$.

N5:

m, q, h, B, E

$t = ?$



$$\begin{cases} F_n = Bqv \cdot \sin \alpha = Bqv \\ F_n = ma_y = \frac{mv^2}{R} \end{cases} \Rightarrow Bqv = \frac{mv^2}{R}, R = \frac{mv}{Bq}$$

$$a_y = \frac{v^2}{R}$$

Положительная заряженная частица, q направ в однородное радиационное магнитное поле, направленное по окружности. И за время $t_1 = \frac{1}{4}T$ она прошла четверть окружности.

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m v}{Bq \cdot v} = \frac{2\pi m}{Bq} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi m}{2Bq} = \frac{1}{4}T$$

Когда частица направлена в однородное электрическое поле, направленное сверху вниз, $v_0 = v$, т.к. в магнитном поле скорость постоянна.

$$R = \frac{at_1^2}{2} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2R}{a}}, \text{ где } a = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m}, R = \frac{mv}{Bq}$$

11-88-416



$$t_2 = \sqrt{\frac{2 m v \cdot m}{B q \cdot E q}} = \frac{m}{q} \cdot \sqrt{\frac{2 v}{B E}}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{2 B q} + \frac{m}{q} \cdot \sqrt{\frac{2 v}{B E}} = \frac{m}{q} \left(\frac{\pi}{2 B} + \sqrt{\frac{2 v}{B E}} \right)$$

63-11-83

Ответ: $t = \frac{\pi m}{2 B q} + \frac{m}{q} \cdot \sqrt{\frac{2 v}{B E}}$

N2.

Рассмотрим ситуацию, когда Петя раскрашивает квадрат размером 2×2 . Вычислим вероятность.

б	с
с	г/б

В первой клетке Петя может выбрать любой из 3 цветов. Рассмотрим каждый из случаев

- ① первая клетка - белая. Тогда соседние могут быть только серыми, а последняя - либо белой, либо черной.
- ② первая клетка - черная. Аналогично (1) ситуации.
- ③ первая клетка - серая. Тогда соседние клетки могут быть либо белыми, либо черными.

Тогда получившиеся вероятности: $p = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2^2 \cdot 2}{3^4}$

Когда Петя раскрашивает прямоугольник размером 8×12 , он также может выбрать, как в какой цвет ему раскрасить первую клетку.

- ① первая клетка - белая. Тогда соседние будут серыми, т.е. половина всех клеток - серый цвет (48).

- ② первая клетка - черная. Аналогично (1) ситуации.

- ③ первая клетка - серая. И соседние могут быть либо белыми, либо черными.

Тогда вероятность события: $p = \frac{2^{48} \cdot 2}{3^{96}}$

