

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

11-10 416

шифр 63-11-81

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	9	13	10	6	10	10	15	15	88

Вариант 1

1. $9\sqrt{2-\log_2 x} - 2|4\log_2 x - 4| \leq 9\log_2 x - 2|4\sqrt{2-\log_2 x} - 4|$ ОДЗ?

$9\sqrt{2-\log_2 x} + 2|4\sqrt{2-\log_2 x} - 4| \leq 9\log_2 x + 2|4\log_2 x - 4|$

Заметим, что справа и слева у нас стоит одинаковая функция: $f(t) = 9t + 2|4t - 4|$

Поэтому: $9\sqrt{\alpha_1} + 2|4\sqrt{\alpha_1} - 4| \leq 9\alpha_2 + 2|4\alpha_2 - 4|$, где $\alpha_1 = \sqrt{2-\log_2 x}$
 $\alpha_2 = \log_2 x$

$f(\alpha_1) \leq f(\alpha_2)$

Распишем $f(t)$ раскрыв модуль:

$$f(t) = \begin{cases} 9t + 8t - 14, & t \geq \frac{4}{4} \\ 9t - 8t + 14, & t < \frac{4}{4} \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 17t - 14, & t \geq \frac{4}{4} \\ t + 14, & t < \frac{4}{4} \end{cases}$$

получается, что $f(t)$ возрастает на всем промежутке и непрерывна.

$\Leftrightarrow$

$f(\sqrt{2-\log_2 x}) \leq f(\log_2 x) \Leftrightarrow (\sqrt{2-\log_2 x} \leq \log_2 x)$

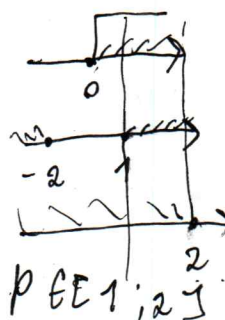
$\sqrt{2-\log_2 x} \leq \log_2 x$

$\log_2 x = p$

$\sqrt{2-p} \leq p$

$$\begin{cases} p \geq 0 \\ 2-p \geq 0 \\ 2-p \leq p^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ p \leq 2 \\ p^2 + p - 2 \geq 0 \end{cases}$$

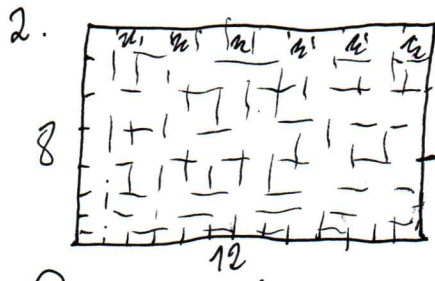
$p^2 + p - 2 \geq 0$
 $(p-1)(p+2) \geq 0$



$\begin{cases} \log_2 x \geq 1 \\ \log_2 x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 4 \end{cases} \quad x \in [2, 4]$

Ответ: $x \in [2, 4]$

+



Дано: прямоугольник $8 \cdot 12$
 3 кр: бел(б), сер(с), чер(ч).
 $p = ?$

Расс-им два случая, но на прямоугольнике $2 \cdot 2$

I Случай: Пусть первая левая клетка закрашена серым цветом. Тогда рядом с ней с ней клетки либо ч, либо б, а по диаг серая.



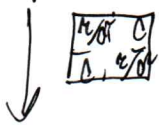
Рассмотрим все возможные случаи:



всего 4 вариации

$\Rightarrow$ вероятность
 $сер_{к1} = \frac{1}{3}, \alpha б/ч_{к1} = \frac{2}{3}$
 $P(I) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3^4}$

II Случай: 1 лев верх к1 закраши ч/б цветом.



Тогда рядом с ней могут быть только серые, а по диаг ч/б.

Рассмотрим все воз случ



всего 4 вар.

$\Rightarrow$ вероятность
 $сер_{к1} = \frac{1}{3}, \alpha б/ч = \frac{2}{3}$
 $P(II) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3^4}$

Таким образом:

$P(I) + P(II) = \frac{4}{3^4} + \frac{4}{3^4} = \frac{8}{3^4} = 2 \cdot \frac{2^2}{3^4}$

Получаем формулу (*) $2 \cdot \frac{2^p}{3^n}$, где p - сколько ч/б клеток закрашено, n - сколько клеток всего.

Вернемся к прямо-ку $8 \cdot 12$.

Всего закрашенных в строчке $\frac{12}{2} = 6$.

Всего закрашенных ч/б: $6 \cdot 8 = 48$

Всего клеток $8 \cdot 12 = 96$.

Подставив в формулу (*) получаем $p = 2 \cdot \frac{2^{48}}{3^{96}} = \frac{2^{49}}{3^{96}}$

Ответ: $p = \frac{2^{49}}{3^{96}}$

$$3. f(x) = ax^2 + (a+1)x + b$$

$$p = 2a + b + 1 (x)$$

11-10-416

63-11-81

Исследуем ф-цию $f(x)$:

но ун принимает ^{полож} знак для всех x ~~и т.д.~~
 $a \geq 0$ (п.к. принимает ^{полож} знак и ветви ^{параб} направлены вверх)
 п-им $a = 0$

$f(x) = x + b \Rightarrow$ знак принимаются не для любых x , а это противоречит ун-ию.

$$a > 0.$$

$a < 0?$

Найдем все положит. знач. x -ые принимает ф-ция.

$$D \leq 0.$$

Из выражения x выразим:

$$b = p - 2a - 1.$$

$$(a+1)^2 - 4ab \leq 0$$

$$a^2 + 2a + 1 - 4a(p - 2a - 1) \leq 0$$

$$a^2 + 2a + 1 - 4ap + 8a^2 + 4a \leq 0$$

$$9a^2 + 6a + 1 \leq 4ap$$

$$(3a+1)^2 \leq 4ap$$

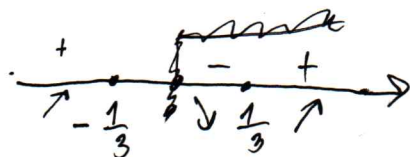
$$p \geq \frac{(3a+1)^2}{4a}$$

Для нахождения наим. значения исследуем ф-цию $f(a) = \frac{(3a+1)^2}{4a}$.

Для нахождения наим. знач. найдем производную:

$$f'(a) = \frac{2 \cdot 3(3a+1) \cdot 4a - 4(3a+1)^2}{416a^2} = \frac{18a^2 + 6a - 9a^2 - 6a - 1}{4a^2} = \frac{9a^2 - 1}{4a^2} =$$

$$= \frac{(3a-1)(3a+1)}{4a}$$



$a = \frac{1}{3}$ — единств. $\min$ и в ней функция достигает наим. знач.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(3 \cdot \frac{1}{3} + 1\right)^2}{4 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{4 \cdot 3}{4} = 3.$$

$$p \geq 3 \Rightarrow p = 3.$$

$p = ?$

Ответ: $p = 3$.

6. $C = 200 \cdot 10^{-6} \text{ фФ}$

$R_1 = 10 \text{ Ом}$

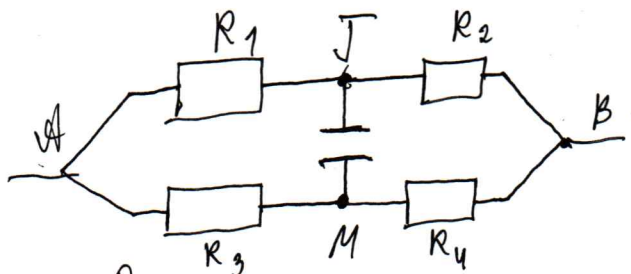
$R_2 = 20 \text{ Ом}$

$R_3 = 30 \text{ Ом}$

$R_4 = 40 \text{ Ом}$

$U_0 = 210 \text{ В}$

$q = ?$



1) Для нахождения заряда конденсатора необходимо найти $\varphi_J - \varphi_M$

2) Через достаточно большое время конденсатор зарядится и через него не будет течь ток.

3) П.к. источник ~~напряжения~~ и резисторы R_{12} и R_{34} подсоединены параллельно, то $U_0 = U_{12} = U_{34}$.

4) R_1 и R_2 соединены последовательно:

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 10 + 20 = 30 \text{ Ом}$$

$$U_{12} = U_0$$

$$I_{12} = \frac{U_0}{R_{12}} = \frac{210}{30} = 7 \text{ А}$$

$$\varphi_A - \varphi_J = R_1 \cdot I_{12} = 10 \cdot 7 = 70 \text{ В}$$

5) R_3 и R_4 соединены последовательно:

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 30 + 40 = 70 \text{ Ом}$$

$$I_{34} = \frac{U_{34}}{R_{34}} = \frac{210}{70} = 3 \text{ А} \quad (\alpha)$$

6) Разность потенциалов равна: $(\alpha - \sigma)$.

$$\varphi_A - \varphi_M - \varphi_A + \varphi_J = 70 - 70 = 20 \text{ В}$$

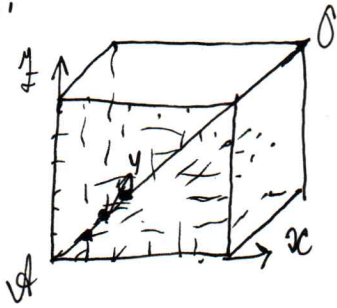
$$\varphi_J - \varphi_M = 20 \text{ В}$$

$$7) q = C \cdot (\varphi_J - \varphi_M) = 200 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Кл} = 4 \text{ мКл}$$

Ответ: $q = 4 \text{ мКл}$



ч.



Введем декартову с-му коорд.

$A(0;0;0)$ $O(6;4;11)$. 63-11-81

Уравним ур-е прямой AO :

$$\frac{x-x_A}{x_0-x_A} = \frac{y-y_A}{y_0-y_A} = \frac{z-z_A}{z_0-z_A}$$

подставим численные коорд:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{11}$$

Умножим уравнение куб на его плоскости с шагом по x равным 1.

$$x = 1$$

$$y = \frac{4}{6} < 2$$

$z = \frac{11}{6} < 2$ - т.к. образам если сдвинуть на 1 по x , то ила проткнет э кубика $(1-x, 1-y, 1-z)$. Аналогично считаем для след ила.

$$x = 2$$

$$y = \frac{14}{6} < 3$$

$$z = \frac{22}{6} < 4 \quad (\text{по } x=1, y=1(3-2=1), z=2(4-2=2))=4$$

$$x = 3$$

$$y = \frac{21}{6} < 4$$

$$z = \frac{33}{6} < 6 \quad 4 \text{ р.}$$

$$x = 4$$

$$y = \frac{28}{6} < 5$$

$$z = \frac{44}{6} < 8 \quad 4 \text{ р.}$$

$$x = 5$$

$$y = \frac{35}{6} < 6$$

$$z = \frac{55}{6} < 10 \quad 4 \text{ р.}$$

$$x = 6$$

$$y = 4 < 8$$

$$z = 11 < 12 \quad 3 \text{ р. (т.к. последняя точка).}$$



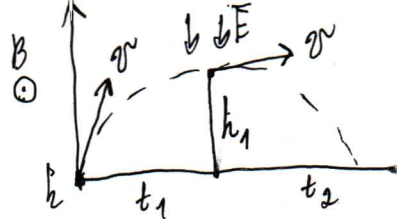
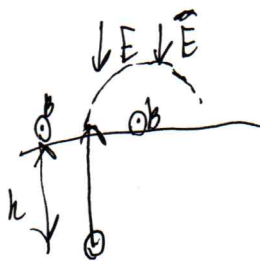
Что есть мы брали x и увеличивали на 1 и смотрели как при этом изменяются координаты по y и z и если они изменялись на 1, то ила протыкала 1-ю плоскость, той координаты, которая изменилась на 1. Если же числовое значение изменялось больше чем на 1, то ила протыкала несколько единичных кубов.

Таким образом, посчитав все случаи протыкания получаем:

$$3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 = 22 \text{ протыкания} \Rightarrow 22 \text{ единичных кубов проткнет ила.}$$

Ответ: 22.

5. m
 q
 h
 E
 B .



$$h_1 = R.$$

1) P-ий 1 участок (до вхождения в $F_{эл}$).

$$F_{\mu} = Bq v \sin \alpha$$

$$F_{\mu} = m a \quad a = \frac{v^2}{R}$$

$$Bq v = \frac{m v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m v}{Bq} = h_1$$

Но с тем частица за время t_1 пролетела $\frac{1}{4} T \Rightarrow t_1 = \frac{1}{4} T$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m v}{Bq v} \quad t_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi m}{Bq} = \frac{\pi m}{2 Bq}$$

2) P-ий 2 участок

$$h = \frac{at_2^2}{2}$$

$$\begin{cases} F_{эл} = m a & Eq = m a \\ F_{эл} = Eq & a = \frac{Eq}{m} \end{cases}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2hm}{Eq}}$$

$$3) t_{общ} = t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{2 Bq} + \sqrt{\frac{2hm}{Eq}}$$

Ответ: $t_{общ} = \frac{\pi m}{2 Bq} + \sqrt{\frac{2hm}{Eq}}$

11-10-416

$$T = KV^2$$

$$A_{12} = 2,16 A_{31}$$

$$p_1 = p_0$$

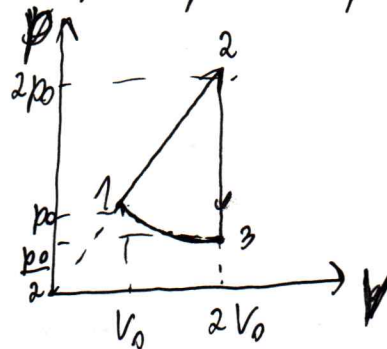
$$V_1 = V_0$$

$$V_2 = 2V_0$$

$$\eta = ?$$



Перестроим график в p/V.



63-11-81

1) Процесс 1-3: изотермический:

$$p_1 V_1 = p_3 V_3 \quad V_2 = V_3 = 2V_0$$

$$p_0 V_0 = p_3 \cdot 2V_0$$

$$p_3 = \frac{p_0}{2}$$

$$3) \eta = 1 - \frac{|Q_{31}|}{Q_{12}}$$

$$Q_{12} = Q_{12}$$

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}$$

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1)$$

$$pV = \nu RT$$

$$U_{12} = \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) =$$

$$= \frac{3}{2} (2p_0 \cdot 2V_0 - p_0 V_0) = 4,5 p_0 V_0$$

$$A_{12} (\text{5 пог } \eta) = \frac{p_0 + 2p_0}{2} \cdot V_0 = 1,5 p_0 V_0$$

$$p_0 V_0 = \frac{A_{12}}{1,5}$$

$$U_{12} = \frac{4,5 \cdot A_{12}}{1,5} = 3 A_{12}$$

$$Q_{12} = A_{12} + 3 A_{12} = 4 A_{12} =$$

$$= 2,16 \cdot 4 A_{31} = 8,64 A_{31}$$

2) Процесс 2-3 изохорный:

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3}$$

$$T_2 = KV_2^2 = 4KV_0^2 \quad T_1 = KV_1^2 = KV_0^2$$

$$T_3 = T_1 = KV_0^2$$

$$\frac{p_2}{4KV_0^2} = \frac{p_0}{KV_0^2} \Rightarrow p_2 = 4p_0$$

$$|Q_{23}| = |Q_{23}| + |Q_{31}|$$

$$|Q_{23}| = |\Delta U_{23}| + A_{23}$$

$$pV = \nu RT$$

$$|\Delta U_{23}| = \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_3 V_3) =$$

$$= \frac{3}{2} (4p_0 V_0 - p_0 V_0) = 4,5 p_0 V_0$$

$$|\Delta U_{23}| = U_{12} = 3 A_{12} =$$

$$= 3 \cdot 2,16 A_{31} = 6,48 A_{31}$$

$$|Q_{23}| = 6,48 A_{31} + A_{31} = 7,48 A_{31}$$

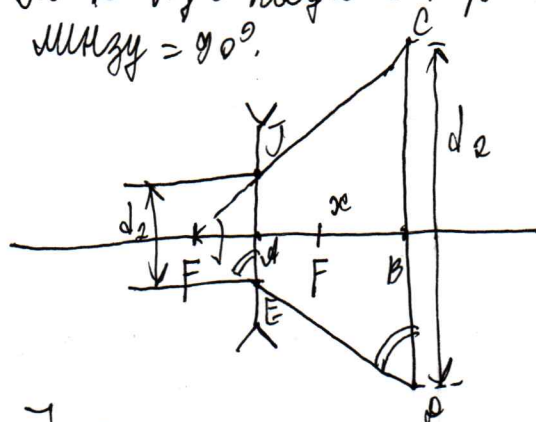
$$\eta = 1 - \frac{7,48 A_{31}}{8,64 A_{31}} = 1 - 0,865 = 0,135$$

$$\eta = 0,135 \cdot 100\% = 13,5\%$$

$$\text{Ответ: } \eta = 13,5\%$$

8. $D_k = -4$ диоптр.
 $d_1 = 5$ см
 $d_2 = 20$ см
 $D_c = ?$

1) $|F_k| = \frac{1}{|D_k|} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ м} = 25 \text{ см}$.
 Пл. к луч падает нормально, то угол падения на линзу $= 90^\circ$.
 Рассеивающая линза.



Гр от линзы до экрана АВ

$\triangle FJE \sim \triangle FCD$ (по 2 углам) высоты в подобных треугольниках относятся как стороны

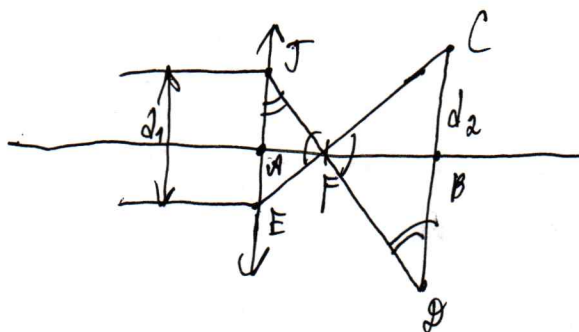
$$\frac{JE}{CD} = \frac{FA}{FA+AB}$$

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{|F|}{|F|+AB} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$4|F| = |F| + AB$$

$$3|F| = AB \Rightarrow AB = 3 \cdot 25 = 75 \text{ см}$$

2) Собирающая линза.



$\triangle JEF \sim \triangle DCF$

высоты в подобных треугольниках относятся как стороны

$$\frac{JE}{DC} = \frac{AF}{FB}$$

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_c}{AB - F_c} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$4F_c = AB - F_c$$

$$5F_c = AB$$

$$F_c = \frac{AB}{5} = \frac{75}{5} = 15 \text{ см} = 0,15 \text{ м}$$

$$D_c = \frac{1}{0,15} = \frac{1 \cdot 10^2}{15} = \frac{20}{3} \approx 6,67 \text{ диоптр}$$

Ответ: 6,67 диоптр.