

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр A-51-11-01

Задача 1

$$R_3 \ll l$$

$$R_M \ll l$$

l - расстояние между планетами

Поскольку расстояние
между Землей
и Марсом много
больше их радиусов
то будем считать

их материальными точками.

m - масса тела

$$F = \frac{G m_1 m_2}{R^2}$$

- закон Гюкенса

x - расстояние от Земли до точки Лагранжа.

Пусть в этой точке положится тело, тогда

$F_M = F_3$, по определению точки Лагранжа.

$$F_M = \frac{G M_M \cdot m}{(l-x)^2}$$

$$F_3 = \frac{G M_3 \cdot m}{x^2}$$

$$F_M = F_3 \Rightarrow \frac{G M_M m}{(l-x)^2} = \frac{G M_3 m}{x^2} \quad \begin{matrix} m \neq 0 \\ G \neq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{M_M}{(l-x)^2} = \frac{M_3}{x^2} ; M_M \cdot x^2 = M_3 (l-x)^2 \quad \frac{x^2}{(l-x)^2} = \frac{M_3}{M_M}$$

$$\frac{x}{l-x} = \sqrt{\frac{M_3}{M_M}}$$

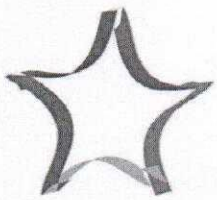
$$x = (l-x) \sqrt{\frac{M_3}{M_M}}$$

$$x = l \sqrt{\frac{M_3}{M_M}} \quad \cancel{x} \sqrt{\frac{M_3}{M_M}}$$

$$x \left(1 + \sqrt{\frac{M_3}{M_M}} \right) = l \sqrt{\frac{M_3}{M_M}}$$

$$x = l \frac{\sqrt{\frac{M_3}{M_M}}}{1 + \sqrt{\frac{M_3}{M_M}}}$$

лист (7)



Задача 1: продолжение

$$X = l \frac{\sqrt{\frac{M_3}{M_M}}}{1 + \sqrt{\frac{M_3}{M_M}}}$$

~~47,6~~

$$\sqrt{\frac{60}{6,4}} \approx 3,062$$

$$X = 54,6 \cdot 10^6 \cdot \frac{\sqrt{\frac{60 \cdot 10^{24}}{6,4 \cdot 10^{23}}}}{1 + \sqrt{\frac{6 \cdot 10^{24}}{6,4 \cdot 10^{23}}}} = 54,6 \cdot \frac{\sqrt{\frac{60}{6,4}} \cdot 10^6}{1 + \sqrt{\frac{60}{6,4}}} =$$

$$= 54,6 \cdot \frac{3,062}{1 + 3,062} \cdot 10^6 = \frac{54,6 \cdot 3,062}{4,062} \approx 41,2 \cdot 10^6 \text{ км} =$$

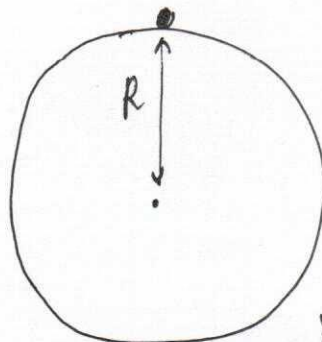
$$= 41,2 \text{ млн км}$$

Ответ: 41,2 млн км от Земли, или
13,4 млн км от Марса.

Задача 2

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2} - \text{закон всемирного тяготения}$$

$$g_M = \frac{G M}{R^2}$$



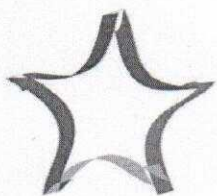
II з. Ньютона
 $F = m \vec{a}$

$$F_T = G \frac{M m}{R^2}$$

$$F_T = m g_M$$

$$m g_M = G \frac{M m}{R^2}$$

луч (2)



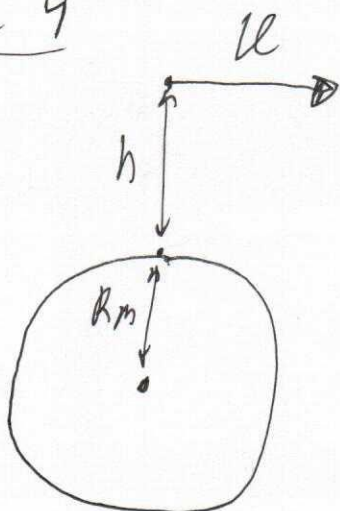
Задача 2: продолжение

$$g_M = \frac{GM}{R^2} \quad g_M = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,4 \cdot 10^{23}}{3430^2 \cdot (10^3)^2} =$$
$$= \frac{6,67 \cdot 6,4 \cdot 10^{12}}{3430^2 \cdot 10^6} = \frac{6,67 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{3430^2} \approx 3,63 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Ответ $3,63 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Задача 4

$$h = R_m$$



А1) Работа А1 идуа
на поднахе спутника
идёт на изменение
потенциальной энергии,
против силы притяжения.

~~$A_1 = E_1 - E_2$~~

$$A_1 = E_1 - E_2$$

E_1 - энергия у поверхности

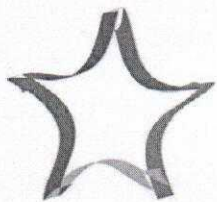
E_2 - энергия на высоте h

$$A_1 = \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{2R} = \boxed{\frac{GMm}{2R}}$$

$$E_1 = \frac{GMm}{R}$$

$$E_2 = \frac{GMm}{R+h} = \frac{GMm}{2R}$$

лист (3)



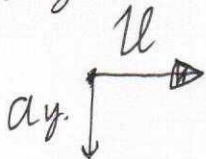
Задача 4: продолжение

$$A_1 = \frac{GMm}{2R}$$

A₂) Работа A₂ идёт на изменение скорости спутника. $A_2 = E_k - E_0 = E_k$

$$A_2 = \frac{mv^2}{2}$$

v - найдём из уравнений движения по окружности



$$a_y = \frac{v^2}{R}$$

$$F = \frac{G m_1 m_2}{R^2}$$

закон всемирного
тяготения

II з. Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$F_y = ma_y$$
$$F_y = \frac{mv^2}{R}$$

$$\frac{GMm}{(2R)^2} = \frac{mv^2}{R}$$

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GMm}{4R^2} \quad R \neq 0$$

$$mv^2 = \frac{GMm}{4R} \quad \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{8R}$$

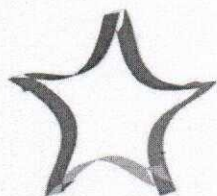
$$E_k = \frac{GMm}{8R}$$

$$A_2 = \frac{GMm}{8R}$$

лист 4

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{GMm}{2R}}{\frac{GMm}{8R}} = \frac{GMm \cdot 8R}{GMm \cdot 2R} = \frac{8}{2} = 4$$

Ответ: 4



Задача 3

Введём величину ρ - плотность метеороидов

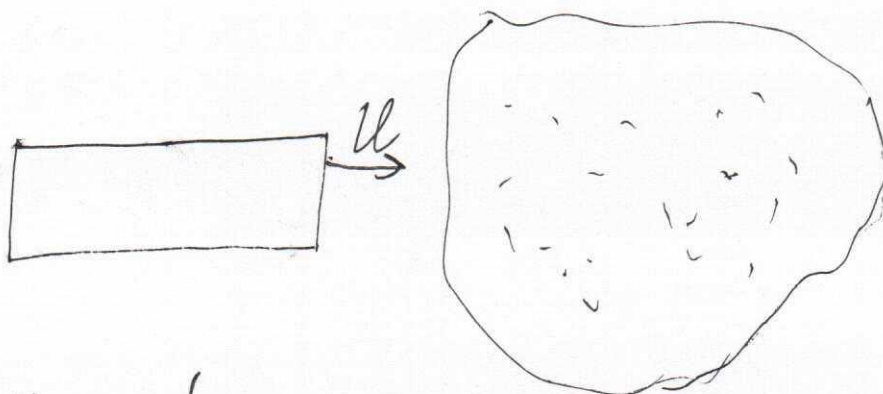
$$\rho = \frac{m_0}{V}$$

$$V = 7 \text{ м}^3$$

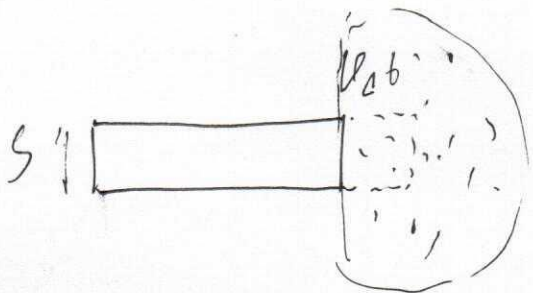
Из Ньютона в импульсной форме

$$\vec{F} \Delta t = \Delta \vec{p}$$

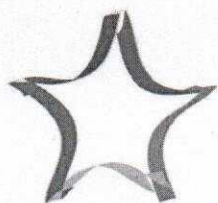
Рассмотрим систему тел: планета + метеорит



За время Δt ~~на метеорит~~ планета пройдёт расстояние $u \Delta t$, значит на неё накинута (так как удар абсолютно не упругий) все метеориты на расстоянии в абёче $\Delta V = S u \Delta t$



мет(5)



Задача 3: продолжение

Теперь запишем II з. Ньютона в импульсной
форме M — масса ракеты

$$p_{\text{нач}} = M v + \Delta m \cdot 0$$

$$p_{\text{кон}} = (M + \Delta m) v$$

$$\begin{aligned} 10 \text{ км} &= 10 \cdot 10^3 \text{ м} = \\ &= 10^4 \text{ м} \end{aligned}$$

Δm — масса падающих метеоритов

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho S v \Delta t$$

$$F \Delta t = p_{\text{кон}} - p_{\text{нач}}$$

$$F \Delta t = (M + \Delta m) v - M v$$

$$F \Delta t = \Delta m v$$

$$F \cancel{\Delta t} = \rho S v \cancel{\Delta t} \cdot v \quad \Delta t \neq 0$$

$$\boxed{F = \rho S v^2}$$

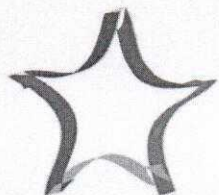
$$F = \frac{m_0 S v^2}{V}$$

$$F = \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot 49 \cdot (604)^2}{1}$$

$$= \frac{98 \cdot 10^{-5} \cdot 10^4}{1} = 98.000 \text{ Н} = 98 \text{ кН}$$

Ответ 98 кН

лист (6)



Задача 5

$S = v \cdot t$ — время полета

— Если скорость ракеты постоянна

$t = \frac{S}{v}$ — скорость ракеты

расстояние
от Земли
до Марса

$$t = \frac{S}{v}$$

$$t = \frac{54,6 \cdot 10^6 \text{ км}}{12 \text{ км/с}} = 4,55 \cdot 10^6 \text{ с}$$

$\approx 52,7$ суток

Ответ: 52,7 суток

S — кратчайшее расстояние — прямая
соединяющая центры планет.