

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 58-09-09

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	0	13	0	10	9	15	6	65

Вариант 1

Задача №1

$$\begin{cases} 1 \quad x^2 + 2 = (y+z)^2 \\ 2 \quad y^2 + 3 = (x+z)^2 \\ 3 \quad z^2 + 4 = (x+y)^2 \end{cases}$$

Вычтем из 2 уравнения 1 уравнение

$$y^2 - x^2 + 1 = (x+z)^2 - (y+z)^2$$

$$(y-x)(y+x) + 1 = (x-y)(x+y+2z)$$

$$2(x-y)(x+y+z) = 1$$

Далее из 3 уравнения вычтем 2 уравнение

$$z^2 - y^2 + 1 = (x+y)^2 - (x+z)^2$$

$$(z-y)(z+y) + 1 = (y-z)(y+z+2x)$$

$$2(y-z)(x+y+z) = 1$$

Если поделить новые уравнения друг на друга, то получится

$$x-y = y-z$$

$$x+z = 2y$$

Это соотношение подставляем во 2 уравнение, и получаем, что

$$y^2 + 3 = 4y^2 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x+z = 2 \Rightarrow x = 2-z$$

Далее новое полученное подставляем в 1 уравнение

$$(2-z)^2 + 2 = (1+z)^2$$

$$4 - 4z + z^2 + 2 = 1 + 2z + z^2$$

$$6z = 5$$

$$z = \frac{5}{6} \Rightarrow x = 2 - \frac{5}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{7}{6}; y = 1; z = \frac{5}{6}$$

Задача №3

Всего на окружности 2024 точки и одна из них точка А. Посчитаем сколько всего можно составить многоугольников без точки А, если без А, то всего осталось 2023 точки, минимально для многоугольника надо 3 точки, тогда

всего многоугольников $C_{2023}^3 + C_{2023}^4 + \dots + C_{2023}^{2023}$, тогда теперь посчитаем сколько А, т.е. минимально 3 точки, а 1 уже есть, то всего многоугольников с А $C_{2023}^3 + C_{2023}^4 + \dots + C_{2023}^{2023}$, отсюда видно, что больше тех, которые с точкой А, не $C_{2023}^2 = \frac{2023!}{2! \cdot 2021!} = 1011 \cdot 2023 = 2046263$

Ответ: больше тех, которые включают точку А и на 2046263.

Задача №2

V_{11} - кол-во обслуженных покупателей 1 кассиром до обеда
 V_{12} - кол-во обслуженных покупателей 2 кассиром до обеда
 V_{21} - кол-во обслуженных покупателей 1 кассиром после обеда
 V_{22} - кол-во обслуженных покупателей 2 кассиром после обеда

Заменим уравнения

$$1) \frac{V_{12} - V_{11}}{V_{11} + V_{12}} = 0,25, \text{ откуда } V_{11} = 0,6 V_{12}$$

$$2) \frac{V_{21} - V_{22}}{V_{21} + V_{22}} = 0,2, \text{ откуда } V_{21} = 1,5 V_{22}$$

$$3) \frac{V_{11} + V_{21} - V_{12} - V_{22}}{V_{11} + V_{21} + V_{12} + V_{22}} = 0,1 \Rightarrow \frac{0,5 V_{22} - 0,4 V_{12}}{2,5 V_{22} + 1,6 V_{12}} = 0,1 \Rightarrow V_{22} = \frac{56}{25} V_{12}$$

4) $V_{11} + V_{21} + V_{12} + V_{22} < 250 \Rightarrow 7,2 V_{12} < 250$, т.к. при $V_{12} = 35$, $7,2 V_{12} = 252$, то $V_{12} < 35$, $V_{12} : 5$, т.к. кол-во покупателей целое, тогда $V_{12} : 25$, т.к. $V_{22} = \frac{56}{25} V_{12}$, значит $V_{12} = 25$, и $V_{22} = 36$, значит $V_{12} + V_{22} = 61$ покупатель.
 Ответ: 61 покупатель.

Задача №5

$$V_{x0} = \cos 60^\circ \cdot V_0 = 20 \text{ м/с}$$

$$V_{y0} = \sin 60^\circ \cdot V_0 = 20\sqrt{3} \text{ м/с}$$

Всю 2 секунды, когда скорость по OY отрицательна, сначала рассмотрим когда положительна или

$$V_{y1} = \sqrt{V_0^2 - V_{x0}^2} = 10\sqrt{5} \text{ м/с}$$

$$V_{y1} = V_{y0} - g t_1$$

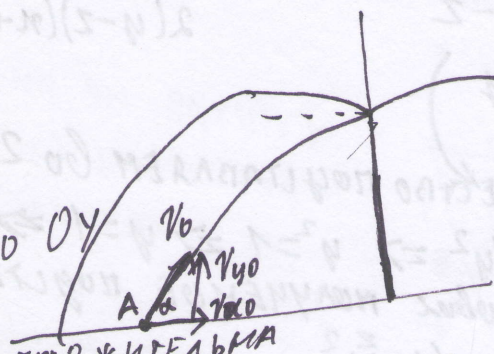
$$t_1 = \frac{V_{y0} - V_{y1}}{g} \text{ точки А, тогда расстояние от А до стены } S_1 = V_{x0} \cdot t_1 = \frac{V_{x0}(V_{y0} - V_{y1})}{g}$$

$$\text{а весь путь } S_0 = V_{x0} t_0 = \frac{2 V_{y0} \cdot V_{x0}}{g}, \text{ тогда искомое } L = |(S_0 - S_1) - S_1| =$$

$$= |S_0 - 2S_1| = \left| \frac{2 V_{y0} V_{x0}}{g} - \frac{2 V_{x0}(V_{y0} - \sqrt{V_0^2 - V_{x0}^2})}{g} \right| = 40\sqrt{5} \text{ м}$$

Рассматривая 2 случая получается, что $V_{y2} = -10\sqrt{5} \text{ м/с}$, $t_2 = \frac{V_{y0} - V_{y2}}{g}$, $S_2 = \frac{V_{x0}(V_{y0} - V_{y2})}{g}$, значит $L_2 = |S_0 - 2S_2| = \left| \frac{2 V_{y0} V_{x0}}{g} - \frac{2 V_{x0}(V_{y0} - \sqrt{V_0^2 - V_{x0}^2})}{g} \right| = 40\sqrt{5} \text{ м}$, получается, что $L_1 = L_2$.

Тогда ответ: $L = 40\sqrt{5} \text{ м}$



Задача №6

$$h_1 = 120 \text{ см} = 1,2 \text{ м}$$

$$h_2 = 115 \text{ см} = 1,15 \text{ м}$$

Пусть m_A - изначальная масса льда, а $m_{BВ}$ - масса образовавшейся воды,

тогда $m_A = m_{BВ} = \rho_A V_A = \rho_B V_{BВ}$; $V_{BВ} = V_A \frac{\rho_A}{\rho_B}$

Теперь запишем уравнения опираясь на график.

$$h_1 S = V_A + V_B$$

$$h_2 S = V_{BВ} + V_B = \frac{\rho_A}{\rho_B} V_A + V_B$$

Из 1 уравнения получаем, что $V_B = h_1 S - V_A$ и подставляем во 2

$$h_2 S = V_A \frac{\rho_A}{\rho_B} + h_1 S - V_A$$

$$V_A = \frac{S(h_1 - h_2)}{1 - \frac{\rho_A}{\rho_B}}$$

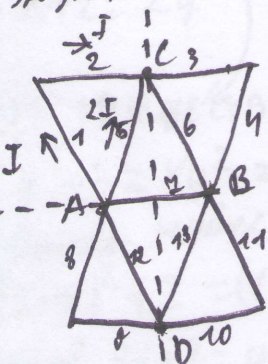
$$V_B = h_1 S - V_A = h_1 S - \frac{S(h_1 - h_2)}{1 - \frac{\rho_A}{\rho_B}} = \frac{S(h_2 - h_1 \frac{\rho_A}{\rho_B})}{1 - \frac{\rho_A}{\rho_B}}$$

$$= \frac{1 \cdot 15 \cdot 9}{0,1} = 1050 \text{ л}$$

Тогда исходные массы $m_{BВ} = m_B + m_A = 1,725 \text{ т}$

Ответ: $m_{BВ} = 0 \text{ кг}$; $m_{BВ} = 1,725 \text{ т}$.

Задача №7



Смотря на рисунок можно провести ось симметрии через точки C и D, тогда пусть через 1 стержень идет сила тока I , и направление тока идет от A и B.

$I_1 = I_2 = I$, т.к. последовательно.

Рассмотрим разность потенциалов в точках A и C.

$$V_A + V_2 = V_5 = 2IR; I_5 = 2I$$

Обратим внимание, что ось симметрии можно провести через точки A и B,

$$\text{тогда } I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = I_6 = I_7 = I_8 = I; I_5 = I_6 = I_7 = I_8 = 2I.$$

Рассмотрев разность потенциалов точек A и B, скажем, что $I_4 = I_5 + I_6 = 4I$,

$$\text{тогда } I_0 = I_1 + I_5 + I_4 + I_{12} + I_3 = 10I; V_0 = V_4 = 4IR,$$

$$\text{тогда } R_0 = \frac{V_0}{I_0} = \frac{4IR}{10I} = \frac{2}{5}R = 3,2 \text{ Ом}$$

Ответ: $R_0 = 3,2 \text{ Ом}$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

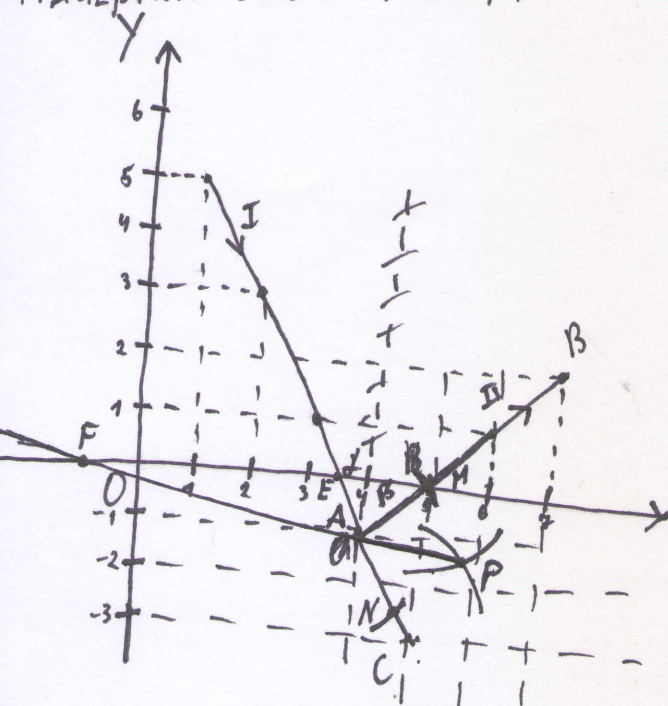
шифр 58-09-09

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

Задача №8

Начертим систему координат



Пересечение продолжения лучей
является точкой отражения
Биссектриса угла между лучами
является плоскостью ~~линии~~ зеркала
Начертим окружность с центром
в точке A, она пересекает
AB и AC в точках M и N соответственно
Теперь начертим две окружности с одина-
ковыми радиусами и с центрами
в точках M и N. Эти окружности пере-
секаются в ~~двух~~ точке P тогда AP и
будет биссектрисой $\angle BAC$ и значити плоскостью
зеркала.

$$\alpha = \alpha + \gamma \frac{1}{2}; \beta = \alpha + \gamma 1 \Rightarrow \angle BAC = 180 - \alpha - \beta$$

$$\angle EAF = \frac{\angle BAC}{2} = \frac{180 - \alpha - \beta}{2}$$

$$\angle FEA = 90 + \alpha$$

$$\angle EFA = ? \quad \angle EFA = 180 - \angle FEA - \angle EAF = 180 - 90 - \alpha - 90 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} =$$

$$= \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{\alpha + \gamma 1 - \alpha + \gamma \frac{1}{2}}{2}$$

$$\text{Ответ: } A(1; -1); \angle EFA = \frac{\alpha + \gamma 1 - \alpha + \gamma \frac{1}{2}}{2}$$