

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 34-09-09

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	12	13	—	10	10	15	15	87

Вариант 1

Задание №1

$$\begin{cases} x^2 + 2 = (y+z)^2; \\ y^2 + 3 = (x+z)^2; \\ z^2 + 4 = (x+y)^2; \end{cases}$$

Сложим все уравнения и по-
лучим: $x^2 + 2 + y^2 + 3 + z^2 + 4 = (y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2$
 $x^2 + y^2 + z^2 + 9 = y^2 + 2yz + z^2 + x^2 + 2xz + z^2 + x^2 + 2xy + y^2$

$$9 = 2yz + 2xz + z^2 + x^2 + 2xy + y^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 9$$

Далее, так как по формуле

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac,$$

$$\text{то: } x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = (x+y+z)^2$$

$$(x+y+z)^2 = 9$$

$$\begin{cases} x+y+z=3; \\ x+y+z=-3. \end{cases}$$

→ исключаем из рассмотрения этот слу-
чай, так как по условию нужно найти все положи-
тельные решения, а значит, $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases} \Rightarrow x+y+z > 0$.

Тогда рассмотрим $x+y+z=3$ (единственный ос-
тавшийся случай).

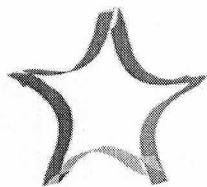
1) $x+y=3-z$, выразим каждую переменную и подста-
вим в изначальные уравнения

$$\begin{aligned} (1) \quad & z^2 + 4 = (x+y)^2 \\ & z^2 + 4 = (3-z)^2 \\ & z^2 + 4 = 9 - 6z + z^2 \\ & 6z = 5 \\ & z = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & x+z=3-y \\ & y^2 + 3 = (x+z)^2 \\ & y^2 + 3 = 9 - 6y + y^2 \\ & 6y = 6 \\ & y = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & y+z=3-x \\ & x^2 + 2 = (y+z)^2 \\ & x^2 + 2 = 9 - 6x + x^2 \\ & 6x = 7 \\ & x = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{7}{6}; y = \frac{5}{6}; z = \frac{5}{6}$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 34-09-09

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

Задание №2

	До	После	Весь	Σ I и II
I	$0,75x$	$1,2y$	$1,2y + 0,75x$	$2,2y + 1,75x$
II	x	y	$y + x$	

Пусть II кассир обслужил x человек до обеда, тогда I обслужил $x - 0,25x = 0,75x$

Пусть после обеда II кассир обслужил y человек, тогда I кассир обслужил $1,2y$ человек

За весь день: $1,2y + 0,75x = 1,1(y + x)$

$$1,2y + 0,75x = 1,1y + 1,1x$$

$$0,1y = 0,35x$$

$$\underline{y = 3,5x}$$

Далее из условия: $2,2y + 1,75x < 250$

$$7,7x + 1,75x < 250$$

$$9,45x < 250$$

$$x < 26$$

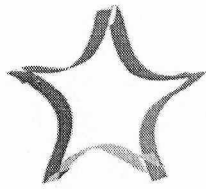
Далее делаем небольшой перебор: $x = 25 \Rightarrow \emptyset$, т.к.

$\frac{3}{4}x \notin \mathbb{Z}$ Значит, x должен быть кратно 4, чтобы не было противоречий. Ближайшее, это $x = 20$, тогда $y = 84$ и $1,2y + 0,75x = 110$.
 Тогда возьмем $x = 20$
 $x = 20$: $y = 70$. С „ y “ также нет противоречий.

$$\text{Тогда } x + y = 90$$

Ответ: 90

$$\begin{array}{r} 110 \\ - 75 \\ \hline 35 \\ \times 2,2 \\ \hline 70 \\ + 700 \\ \hline 770 \\ + 175 \\ \hline 945 \end{array}$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 34-09-09

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

~3

Рассмотрим отдельно 2 окружности (с точкой А и без неё).

С т. А: $2^{2023} - 2023$ вариантов многоугольников, так как мы можем составить многоугольник из 3 и более точек.

Без точки А: $2^{2023} - \frac{2023 \cdot 2022}{2} - 2023$

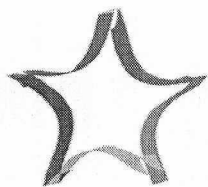
Отнимаем варианты, где многоугольники состоят только из 1 точки на окружности

отнимаем варианты, где не берем 2 точки из всех,

$$\text{Тогда } 2^{2023} - 2023 - 2^{2023} + \frac{2023 \cdot 2022}{2} + 2023 =$$

$$= \frac{2023 \cdot 2022}{2} = 1011 \cdot 2023 = 2045253$$

Ответ: С точкой А больше на 2045253 варианта



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 34-09-09

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

Дано:
 $v_0 = 40 \frac{м}{с}$
 $\angle = 60^\circ$
 $v = 30 \frac{м}{с}$
 $g = 10 \frac{м}{с^2}$
 Отскок абсолют-
 но упругий
 $\Delta L - ?$

Решение:

Поскольку по условию отскок абсо-
 лютно упругий, то можно считать, что
 потеря скорости и энергии не было, а зна-
 чит, можно виртуально убрать верти-
 кальную стенку и представить, что ша-
 рик просто летел дальше.
 Найдём время, за которое шарик про-
 летел весь путь

$$\begin{cases} v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \angle - gt \\ v_x = v_{0x} = v_0 \cos \angle \end{cases}$$

Тогда $v = \sqrt{v_x^2 - v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos \angle)^2 + (v_0 \sin \angle - gt)^2}$

$$30 = \sqrt{400 + (20\sqrt{3} - 10t)^2}$$

$$900 = 400 + (20\sqrt{3} - 10t)^2$$

$$500 = (20\sqrt{3} - 10t)^2$$

$$500 = 1200 - 400\sqrt{3}t + 100t^2$$

$$400 - 400\sqrt{3}t + 100t^2 = 0$$

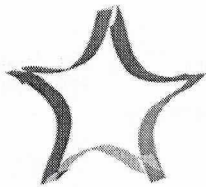
$$t^2 - 4\sqrt{3}t + 4 = 0$$

$$\sqrt{500} = 20\sqrt{3} - 10t$$

$$10t = 20\sqrt{3} - 10\sqrt{5}$$

$$t = 2\sqrt{3} - \sqrt{5} - \text{время}$$

полёта шара до стены



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 34-09-09

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

15 (продолжение)

Тогда найдём l_1 (на рисунке)

$$l_1 = v_0 \cos \alpha \cdot t = v_0 \cos \alpha \cdot (2\sqrt{3} - \sqrt{5}) = 20 \cdot (2\sqrt{3} - \sqrt{5}) = 40\sqrt{3} - 20\sqrt{5}$$

Когда шарик упал на землю, его скорость по ОУ стала равна 0:

$$20\sqrt{3} - gt = 0$$

$$t = \frac{20\sqrt{3}}{g} = 2\sqrt{3}.$$

Так как шарик ^{поднимался} летит до наивысшей точки и опускается вниз за одинаковое время, то всего шарик летит $2t = 4\sqrt{3}$.

$$\text{Тогда } l_2 = v_x \cdot 2t = v_0 \cos \alpha \cdot 4\sqrt{3} = 80\sqrt{3} \quad (l_2 - \text{весь путь шарика по ОХ})$$

$$\text{Значит } \Delta l = l_2 - 2l_1 = \left(\begin{array}{l} \text{так как чтобы найти разницу} \\ \text{между } (l_2 - l_1) \text{ и } l_1, \text{ мы ещё раз} \\ \text{отнимаем } l_1 \end{array} \right)$$

$$= 80\sqrt{3} - 2(40\sqrt{3} - 20\sqrt{5}) =$$

$$= 40\sqrt{5}$$

Ответ: $40\sqrt{5}$

Но есть еще случай, где $\sqrt{500} = 10t - 20\sqrt{3}$

$$10t = 10\sqrt{5} + 20\sqrt{3}$$

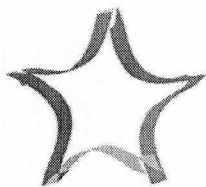
$$t = \sqrt{5} + 2\sqrt{3}$$

$$\text{Тогда: } l_1 = 20 \cdot (\sqrt{5} + 2\sqrt{3}) = 20\sqrt{5} + 40\sqrt{3}$$

$$l_2 - 2l_1 = 80\sqrt{3} - 2(20\sqrt{5} + 40\sqrt{3}) = -40\sqrt{5} \rightarrow \text{но}$$

м.к. < 0 , то не подходит и берем $|-40\sqrt{5}|$

Ответ: $40\sqrt{5}$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 34-09-09

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

№ 6

Дано:

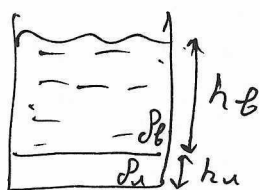
$$\rho_{\text{л}} = 0,9 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$$

$$\rho_{\text{в}} = 1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$$

$$S = 15 \text{ см}^2$$

$m_{\text{л}}, m_{\text{в}} - ?$

Решение:



Когда лёд тает, общая масса сосуда не меняется, тогда:

$$m_{\text{л}} = m_{\text{в}}$$

$$\rho_{\text{л}} \cdot V_{\text{л}} = \rho_{\text{в}} \cdot V_{\text{в}}$$

$$\rho_{\text{л}} \cdot S \cdot h_{\text{л}} = \rho_{\text{в}} \cdot S \cdot h_{\text{в}}$$

$0,9 h_{\text{л}} = h_{\text{в}} \rightarrow$ тает из льда,

высотой $0,9 h_{\text{л}}$ получится столбик воды $0,9 h_{\text{л}}$

Было: лёд растаял через 20 минут после начала нагрева. Высота воды стала 115 см (по шкале)

$$\text{Было: } h_{\text{в}} + h_{\text{л}} = 120 \text{ см}$$

$$\text{Стало: } h_{\text{в}} + 0,9 h_{\text{л}} = 115 \text{ см}$$

} отнимаем из было стало

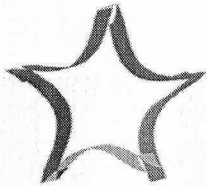
$$0,1 h_{\text{л}} = 5$$

$$h_{\text{л}} = 50 \text{ см} \Rightarrow h_{\text{в}} = 70 \text{ см}$$

$$m_{\text{л}} = \rho_{\text{л}} \cdot S \cdot h_{\text{л}} = 0,9 \cdot 50 \cdot 15 = 675 \text{ г}$$

$$m_{\text{в}} = \rho_{\text{в}} \cdot S \cdot h_{\text{в}} = 1050 \text{ г}$$

Ответ: $m_{\text{в}} = 1050 \text{ г}; m_{\text{л}} = 675 \text{ г}.$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

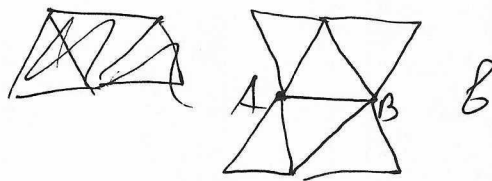
шифр 34-09-09

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

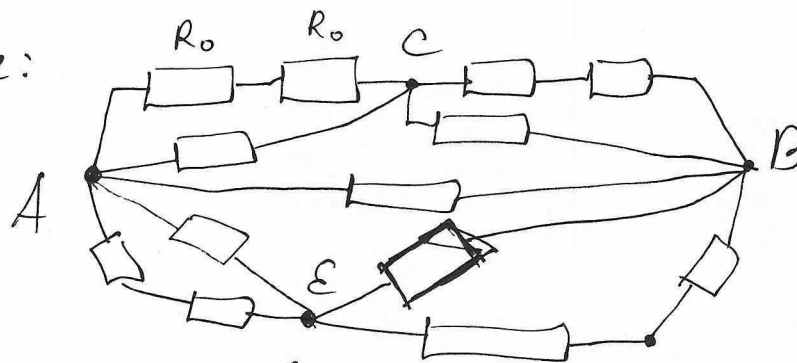
Вариант 1

№7

Преобразуем схему



схему:



(заменяем проводку на резисторы)
Далее считаем сопротивление для всей
цепи:

$$R_{AC} = \frac{2R_0 \cdot R_0}{2R_0 + R_0} = \frac{2R_0^2}{3R_0} = \frac{2}{3}R_0$$

$$R_{CB} = \frac{2}{3}R_0$$

$$R_{ACB} = \frac{2}{3}R_0 + \frac{2}{3}R_0 = \frac{4}{3}R_0$$

$$R_{AB} = R_0$$

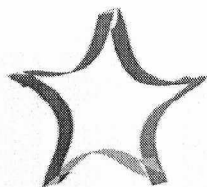
$$R_{AEB} = \frac{4}{3}R_0$$

$$R_{ACB} + R_{AB} = \frac{\frac{4}{3}R_0 \cdot R_0}{\frac{4}{3}R_0 + R_0} = \frac{\frac{4}{3}R_0^2}{\frac{7}{3}R_0} = \frac{4}{7}R_0$$

$$R_{\text{общ}} = R_{ACB} + R_{AB} + R_{AEB} = \frac{4}{7}R_0 + R_0 + \frac{4}{3}R_0 =$$

$$R_{\text{общ}} = (R_{ACB} + R_{AB}) + R_{AEB} = \frac{\frac{4}{7}R_0 \cdot \frac{4}{3}R_0}{\frac{4}{7}R_0 + \frac{4}{3}R_0} = \frac{16R_0}{40} = \frac{4}{10}R_0 = \underline{4 \text{ ом}}$$

Ответ: 4 ом



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

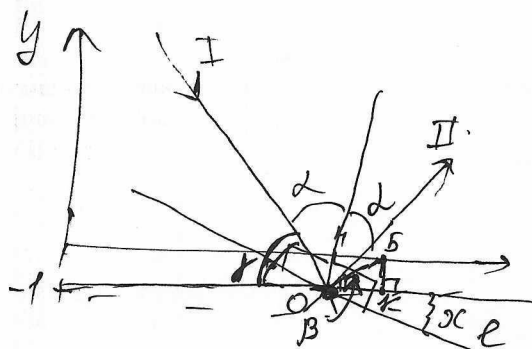
шифр 34-09-09

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

№8

На графике продлим луч I и луч II в направлении к ОХ и найдем их точку пересечения в (4; -1)



Далее проведем биссектрису тупого угла / т.к. по свой-ву плоского зеркала угол падения = углу отражения)

Далее проведем прямую, которая перпендикулярна этой биссектрисе и найдем прямую, на которой лежит плоское зеркало.

Также, проведем прямую $y = -1$, тогда пусть $\angle IOE = \beta$. Тогда $OB = \sqrt{2}$, а $OK = 1$. Тогда угол $\angle IOE = 45^\circ$ (т.к. в точках (4; -1); (4; 0), (5; 0); (5; -1) получился квадрат, а диагональ квадрата - его биссектриса

$$\sin \beta = \frac{4}{6\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$2\alpha = 180 - \beta - \beta$$

$$\alpha = 90 - \frac{\arcsin \frac{2}{3\sqrt{3}}}{2} - 22,5$$

$$\alpha = 90 - \alpha - \beta = 90 - 90 + \frac{\arcsin \frac{2}{3\sqrt{3}}}{2} + 22,5 - 45 = \frac{\arcsin \frac{2}{3\sqrt{3}}}{2} - 22,5$$

Ответ: $\frac{\arcsin \frac{2}{3\sqrt{3}}}{2} - 22,5$