

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 23-11-09

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

Решение:

$$\sqrt{1} \quad 9\sqrt{2 - \log_2 X} - 2|4\log_2 X - 7| \leq 9\log_2 X - 2|4\sqrt{2\log_2 X} - 7|$$

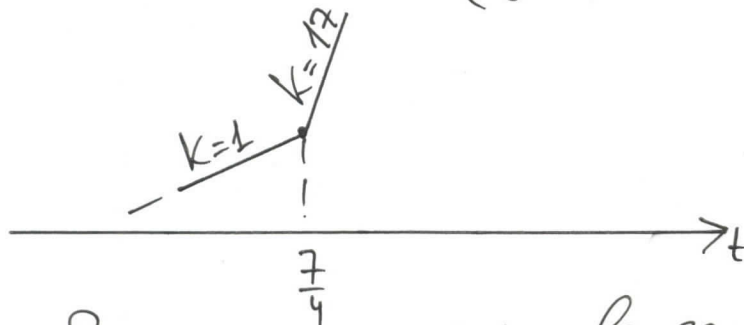
Пусть $\sqrt{2 - \log_2 X} = a$; $\log_2 X = b$, тогда:

$$9a - 2|4b - 7| \leq 9b - 2|4a - 7|$$

$$9a + 2|4a - 7| \leq 9b + 2|4b - 7|$$

Выразим слева и справа одинаковые. Введем функцию:

$$f(t) = 9t + 2|4t - 7| = \begin{cases} 17t - 14 & \text{при } t \geq \frac{7}{4} \\ t + 14 & \text{при } t < \frac{7}{4} \end{cases}$$



то есть функция
монотонно возрастающая

$\Rightarrow f(a) \leq f(b)$ — нер-во, замкнутое через $f(t)$

т.к. $f(t)$ монотонно возрастающая, то

$f(a) \leq f(b) \Leftrightarrow a \leq b$ Вернемся к решению:

$$\sqrt{2 - \log_2 X} \leq \log_2 X$$

$$\sqrt{2 - C} \leq C$$

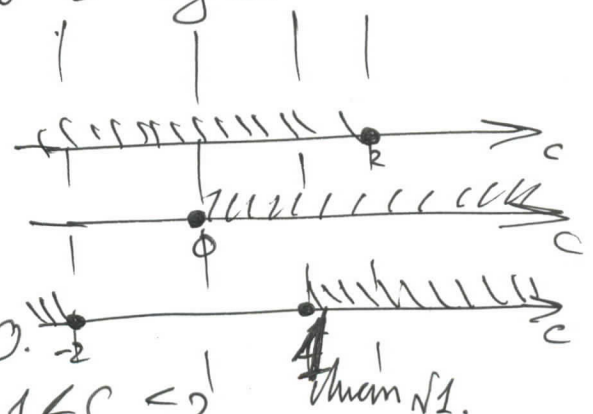
$$\begin{cases} 2 - C \geq 0 \\ C \geq 0 \end{cases}$$

$$2 - C \leq C^2 \Leftrightarrow$$

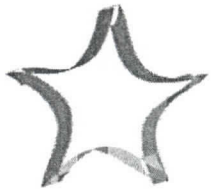
(возведем в квадрат, т.к. обе части неотрицательные)

$$\begin{cases} C \leq 2 \\ C \geq 0 \\ C^2 + C - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 \leq C \leq 2$$



т.е. $\sqrt{1}$.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-09

№1 (Продолжение)

Вернёмся к задаче:

$$1 \leq \log_2 x \leq 2$$

$$\log_2 2 \leq \log_2 x \leq \log_2 4$$

т.к. $2 > 1$, то $2 \leq x \leq 4$
 $x \in [2; 4]$

Ответ: $x \in [2; 4]$.

№3

$$f(x) = ax^2 + (a+1)x + b \geq 0 \text{ при всех } x \in \mathbb{R}$$

Найти: наименьшее значение выражения $2a + b + 1$.

Решение:

1) Заметим, что $a \neq 0$, т.к. в противном случае функция линейная и принимает как положительные, так и отрицательные значения.

А) Чтобы значения $f(x)$ были неотрицательными для любых x , возможны 2 случая:

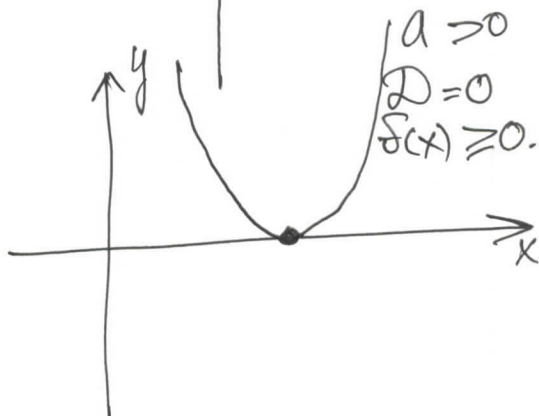
I случай: при $a > 0$ и $D < 0$:

график $f(x)$ будет иметь вид:

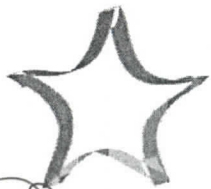


II случай: при $a > 0$ и $D = 0$

график $f(x)$ будет иметь вид:



$\Rightarrow$ Достаточное условие: $\begin{cases} a > 0 \\ D \leq 0 \end{cases}$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-09

№3 (Подготовка)

3) Заметим, что b не может быть меньше 0, т.к. при $b < 0$ график параболы вверх или вниз будет ниже оси Ox
 $\Rightarrow b > 0$.

4) Найдем дискриминант: $D = (a+1)^2 - 4ab \leq 0$
тогда $b \geq \frac{a^2 + 2a + 1}{4a} = \frac{(a+1)^2}{4a}$ (*)

5) Оценим выражение $2a+b+1$, используя (*):

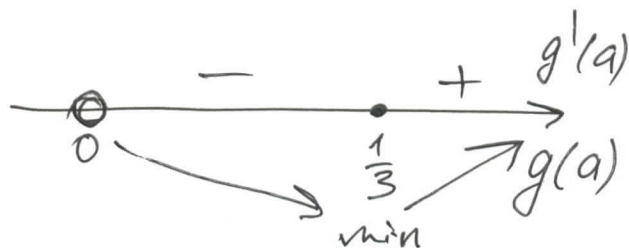
$$2a+1+b \geq 2a+1 + \frac{(a+1)^2}{4a} = \frac{(3a+1)^2}{4a}$$

6) Найдем минимум $g(a)$

$$g'(a) = 0: \left(\frac{9}{4}a + \frac{3}{2} + \frac{1}{4a} \right) = 0$$

$$\frac{9}{4} - \frac{1}{4a^2} = 0$$

$$\frac{9a^2 - 1}{4a^2} = 0$$



$a \neq -\frac{1}{3}$, т.к. $a > 0$.

$\Rightarrow a = \frac{1}{3}$ (В точке $\frac{1}{3}$ $g(a)$ имеет минимум)

7) Подставим a в (*) и найдем значение $2a+b+1$:

$$2a+b+1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 1 = 3$$

Ответ: 3



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-09

№2 Реше:

1) Вероятность события A ; данного в условии задачи, определяется по ф-ле: $P(A) = \frac{n}{m}$; где m - число всевозм. исходов, n - число благоприят. исходов

2) Имеем 3 вар-та раскрашивания для каждой клетки:
1 - белый
2 - серый
3 - серый
1 и 2 не должны стоять рядом;
возможны исходы: а) и б)

а)

1/2	3	1/2	3
3	1/2	3	1/2
1/2	3	1/2	3

б)

3	1/2	3	1/2
1/2	3	1/2	3
3	1/2	3	1/2

3) Серые клетки образуют шахматную раскраску во всем прямоугольнике и занимают ровно половину всех клеток.

⇒ кол-во возможных раскрасок останется половиной клеток $\Rightarrow N = 2 \cdot 2^{\frac{8 \cdot 12}{2}} = 2 \cdot 2^{48} = 2^{49}$

$$4) M = 3^{12 \cdot 8} = 3^{96}$$

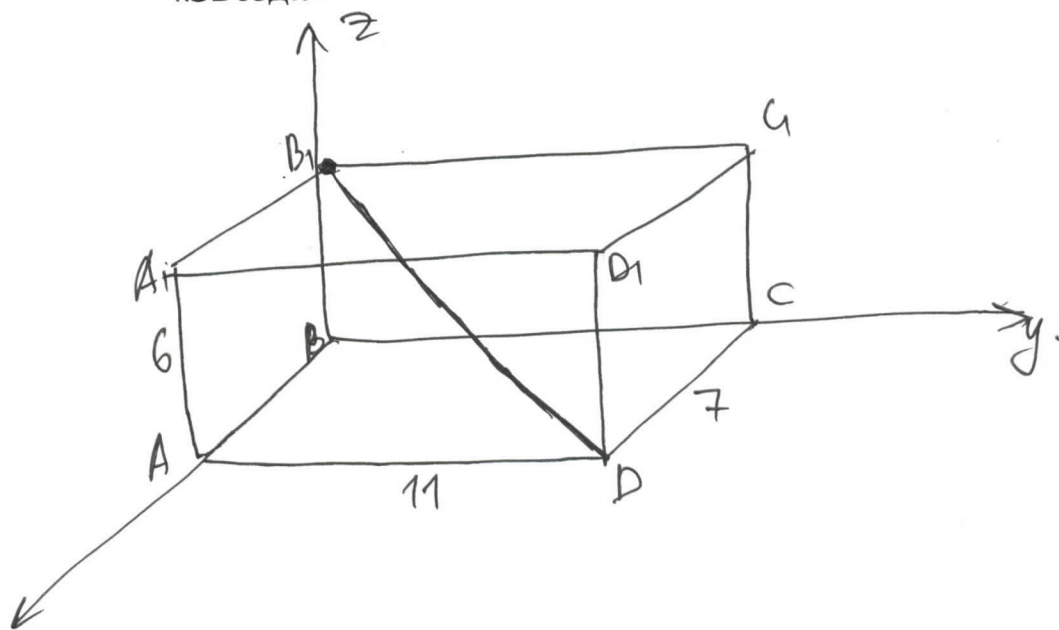
$$\Rightarrow P(A) = \frac{n}{m} = \frac{2^{49}}{3^{96}} = \left(\frac{2}{9}\right)^{48} \cdot 2$$

$$\text{Ответ: } P(A) = \frac{2^{49}}{3^{96}} = \left(\frac{2}{9}\right)^{48} \cdot 2$$

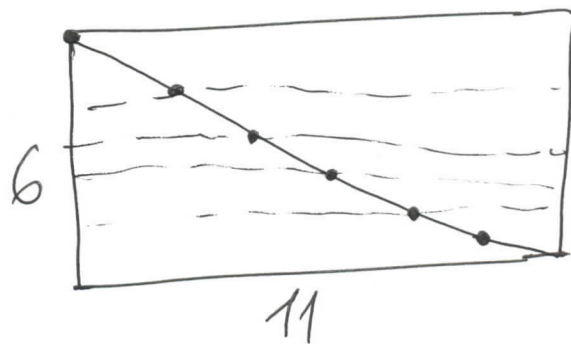
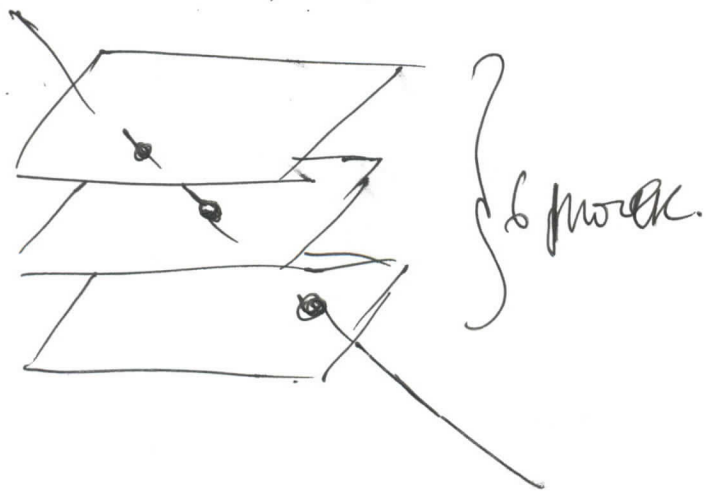


Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-09



- 1) Рассмотрим прямоугол. параллелепипед $A \dots D, C$
- 2) Введём систему координат
- 3) Проведём диагональ B, D :
- 4) Будем рассматривать плоскости, параллельные координатным осям и образующие грани единичных кубов.
- 5) Заметим, что диагональ пересечёт горизонтальные плоскости, параллельные $хоу$, 6 раз.



Лист №5.

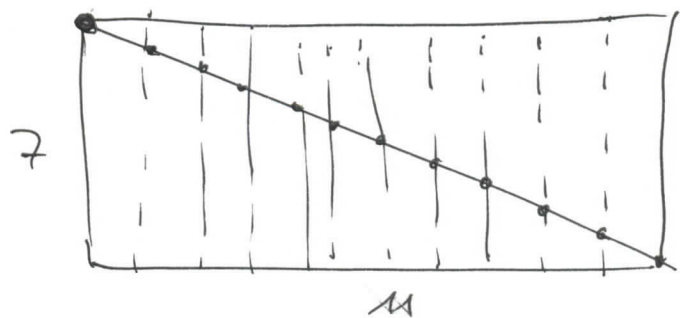
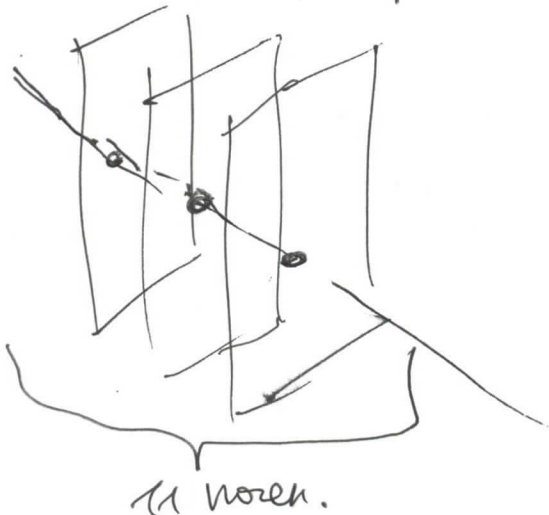


Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-09

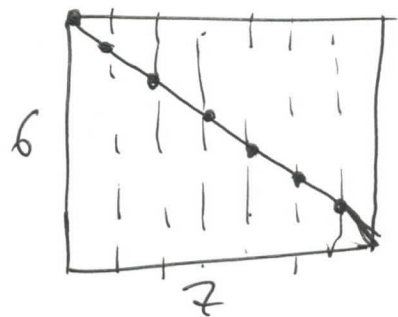
№4 (Продолжение)

- 6) Запомним, что диагональ пересекает вертикальные плоскости, параллельные XOZ ; 11 раз:



- 7) Запомним, что диагональ пересекает вертикальные плоскости, параллельные YOZ ; 7 раз.

- 8) Все точки пересечения с плоскостями не совпадут, т.к. в 5-м пункте мы делим отрезок на 6 частей,
в 6-м на 11 частей
в 7-м на 7 частей



П.к. числа 6, 7, 11 взаимно простые, то точки на отрезке не совпадут кроме последней точки, которую мы учли 3 раза.

- 9) Найдем кол-во плоскостей, которые пересекает диагональ: (учтем, что последняя точка учтена 3 раза):

$$N = (6 + 7 + 11) - 2 = 22$$

Ответ: 22 точки

Лист №6



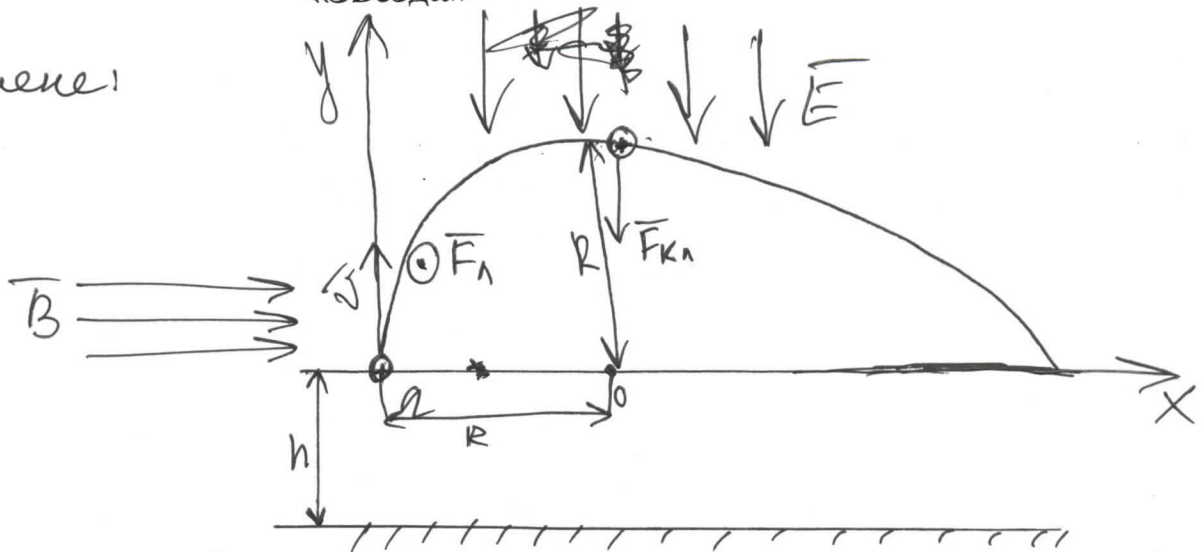
Многопрофильная
инженерная олимпиада

Шифр 23-11-09

«Звезда»

Решение:

№5
Дано:
 $q; m;$
 $B; E.$
 $t - ?$



- 1) Движется в магнитном поле заряженная частица испытывает действие силы Лоренца $F_L = q v B \sin \alpha$ ($\alpha = 90^\circ$
($\sin \alpha = 1$)).
- 2) Направление силы Лоренца F_L перпендикулярно скорости $v \Rightarrow$ частица движется по окружности, имеет центростремительное ускорение.

$$F_L = m a_{yc}$$

$$F_L = m a_{yc}$$

$$F_L = q v B \sin \alpha$$

$$\alpha = 90^\circ; \sin \alpha = 1$$

$$a_{yc} = \frac{v^2}{R}$$

$$q v B = \frac{m v^2}{R}$$

$$R = \frac{m v}{q B}$$

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

$$q B = \frac{m 2\pi R}{R T}$$

$$T = \frac{2\pi m}{q B}$$

мисст №7.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-09

№5 (Продолжение)

3) Под действием э. поле частица ^{равноускоренно:} движется вниз:

$$F_{\text{эл}} = ma$$

$$a = \frac{qE}{m}$$

$$\Rightarrow F_{\text{эл}} = qE$$

$$4) R = \frac{at_2^2}{2} ; t_2 = \sqrt{\frac{2R}{a}} = \sqrt{\frac{2m^2V}{qB \cdot qE}} = \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2V}{BE}}$$

$$t = t_1 + t_2$$

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi m}{2qB}$$

$$\Rightarrow \text{Найдём общее время: } t = \frac{\pi m}{2qB} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2V}{BE}}$$

$$\text{Ответ: } t = \frac{\pi m}{2qB} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2V}{BE}}.$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-09

№6. Дано:

$$C = 2 \cdot 10^{-4} \text{ ф.}$$

$$R_1 = 10 \text{ Ом}$$

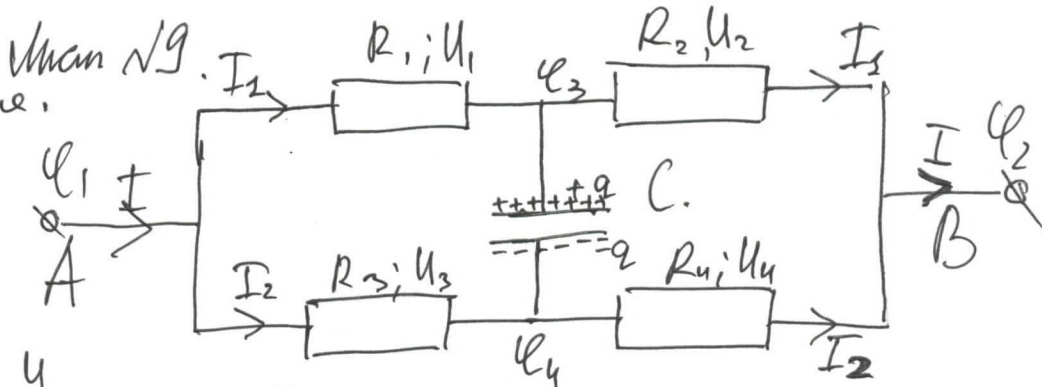
$$R_2 = 20 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 40 \text{ Ом}$$

$$U_0 = 210 \text{ В}$$

q-?

Решение.



$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{210}{10 + 20} = 7 \text{ (A)}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_3 + R_4} = \frac{210}{40 + 30} = 3 \text{ (A)}$$

$$U_1 = I_1 R_1 = 3 \cdot 10 = 30 \text{ (В)}$$

$$U_3 = I_2 R_3 = 3 \cdot 30 = 90 \text{ (В)}$$

$$\begin{aligned} U_1 &= U_1 - U_3 \\ U_3 &= U_1 - U_4 \end{aligned} \quad \text{Возникли из первого и второго уравнения!}$$

$$U_1 - U_3 = U_4 - U_3$$

$$C = \frac{q}{U_4 - U_3} \Rightarrow q = C (U_3 - U_4)$$

$$q = C (U_1 - U_3)$$

$$q = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 60 = 120 \cdot 10^{-4} \text{ (Кл)}$$

Ответ: $120 \cdot 10^{-4} \text{ (Кл)}$

Михаил №9



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-09

W7 Дано,

$$T = k V^2$$

$$V_3 = 2V_1$$

$$A_{12} = 2,16 |A_{31}|$$

$\eta = ?$

Решение!

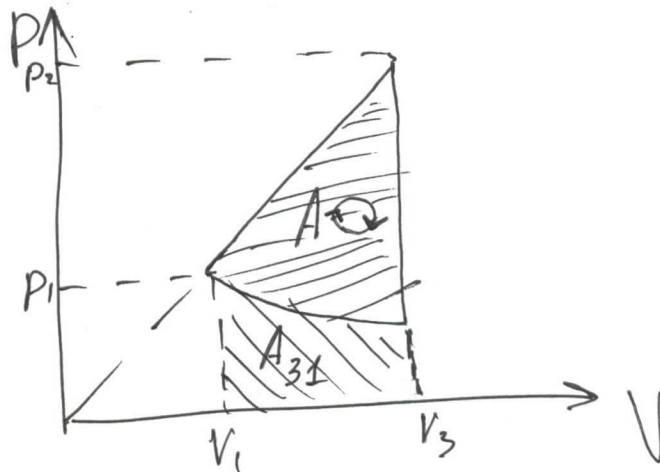
$$PV = \nu RT$$

$$PV = \nu R k V^2$$

$$P = \nu R k V$$

$$P = \alpha V (\alpha = \nu R k)$$

y — это некресов — Киндерс



$$A_{12} = \frac{P_2 + P_1}{2} (V_3 - V_1)$$

$$A_{12} = \frac{(3P_1 + P_1)}{2} \cdot V_1$$

$$A_{12} = \frac{3P_1 V_1}{2}$$

$$A_{23} = 0$$

$$A_Q = A_{\text{крес. пр.}} = A_{12} - |A_{31}| = A_{12} - \frac{A_{12}}{2,16} = A_{12} \left(1 - \frac{1}{2,16}\right) = A_{12} \cdot 0,537$$

$$Q_1 = Q_2 = A_{12} + \Delta U_{12}$$

$$Q_{23} = \Delta U_{23} < 0$$

$$Q_{31} = A_{31} < 0$$

$$A_Q = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = A_{12} + \Delta U_{12} + \Delta U_{23} + A_{31}$$

$$\Delta U_{12} = -\Delta U_{23}$$

$$Q_n = Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12}$$

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} (P_2 V_2 - P_1 V_1) = \frac{i}{2} (2P_1 \cdot 2V_1 - P_1 V_1) = \frac{i}{2} \cdot 3P_1 V_1 = \frac{3i}{2} P_1 V_1 = i A_{12}$$

илим 10.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 23-11-09

№2 Проточные:

$$\eta = \frac{A \cdot a}{Q_n} = \frac{A_{s,2} \cdot 0,573}{i \cdot A_{s,1}} = \frac{0,573}{i}, \text{ где } i - \text{степеней свободы газа.}$$

η для одноатомного газа: ($i=3$) $\eta_1 = \frac{0,573}{3} \approx 0,19$

η для двухатомного газа ($i=5$) $\eta_2 = \frac{0,573}{5} = 0,11$.

Ответ: $\eta_1 = 0,19$; $\eta_2 = 0,11$.

№3 Дано:

$$D_p = -4 (\text{Dump})$$

$$d_1 = 0,05 (\text{м})$$

$$d_2 = 0,2 (\text{м})$$

$D_c = ?$

рассеивание:

$$F_p = \frac{1}{D_p} = \frac{1}{-4} = -0,25 (\text{м}) - \text{фокусное расстояние рассеивающей линзы.}$$

применим подобие:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_p}{F_p + l} = \frac{1}{4} = \frac{5}{20}$$

$$\Rightarrow 25 + l = 100 \text{ см}$$

$$l = 75 (\text{см})$$

собирающая:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_c}{l - F_c} = \frac{1}{4}$$

подставим численные значения.

$$\frac{F_c}{75 - F_c} = \frac{1}{4}$$

$$5 F_c = 75$$

$$F_c = 15 (\text{см}) = 0,15 (\text{м})$$

$$\Rightarrow D_c = \frac{1}{F_c} = \frac{1}{0,15} = 6 (\text{Dump})$$

Ответ: 6 (Dump)

участник №11.

