11-08-508

шифр 63-11-212

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	9	13	9	5	10	8	12	15	81

Вариант 1.

1. $9\sqrt{2-\log_2 x} - 2|4\log_2 x - 7| \le 9\log_2 x - 2|4\sqrt{2-\log_2 x} - 7|$

$9\sqrt{2-\log_2 x} + 2|4\sqrt{2-\log_2 x} - 7| \le 9\log_2 x + 2|4\log_2 x - 7|$

ОДЗ?

Можно заметить, что неравенство еквиваленнтно

$f(\sqrt{2-\log_2 x}) \le f(\log_2 x)$, где $f(\cancel{x}) = 9x + 2|4x-7|$

$f(x) = \begin{cases} 9x + 8x - 14, & x \ge \frac{7}{4} \\ 9x - 8x + 14, & x < \frac{7}{4} \end{cases}$ => $f(x)$ - ф-ия непрерывная и возрастающая на $x \in R$ =>

не док.

=> ~~наибольшему~~ значению аргумента ~~самое~~ соответствует ~~наибольшемуее~~ большее значение функции.

$f(\sqrt{2-\log_2 x}) \le f(\log_2 x)$ => $\sqrt{2-\log_2 x} \le \log_2 x$

Пусть $\log_2 x = t$, тогда $\sqrt{2-t} \le t$ => $\begin{cases} t \ge 0 \\ 2-t \ge 0 \\ 2-t \le t^2 \end{cases}$ $\begin{cases} t \in [0;2] \\ t^2 + t - 2 \ge 0 \end{cases}$

$\begin{cases} t \in [0;2] \\ \left[\begin{array}{l} t \ge 1 \\ t \le -2 \end{array}\right. \end{cases}$

$\begin{cases} t \ge 1 \\ t \le 2 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_2 x \ge 1 \\ \log_2 x \le 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0 \\ x \ge 2 \\ x \le 4 \end{cases}$ $x \in [2;4]$

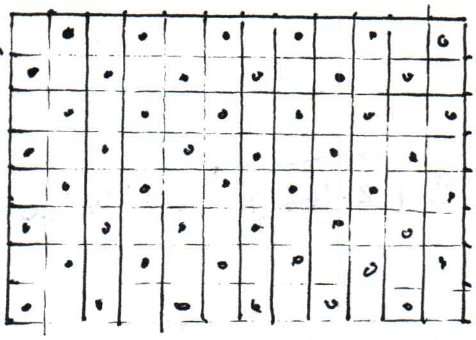
±

Ответ: $x \in [2;4]$

2. Согласно условию, у черной клетки соседними могут быть только серые
У белых – серые
У серых – белые и черные.

Назовем цветной клеткой клетку белого или черного цвета, тогда у нее соседями могут быть – серые, а у серых – цветные.

В таком случае раскраска прямоугольника будет аналогично шахматной где • – серые, а незакрашенные клетки – цветные.



есть 2 способа раскрасить прямоугольник так: начать с цветной или начать с серой ~~при~~ в обеих случаях кол-во клеток будет одинаковым т.к ~~96~~ $8\cdot 12 = 96 : 2$. кол. во цветных клеток ~~будет~~ $\frac{96}{2} = 48$

а способов раскрасить их в ~~це~~ черный или белый 2^{48}.

Итак, способов раскрасить прямоугольник удовлетворяющим условию способом равно $2\cdot 2^{48} = 2^{49}$.

А ~~способов~~ всего сп-в раскрасить прямоугольник 3^{96}.

Тогда вероятность раскрасить пр-к $\frac{2^{49}}{3^{96}}$ +

Ответ: $\frac{2^{49}}{3^{96}}$.

3. $f(x) = ax^2+(a+1)x+b$, $f(x)\geq 0$, $x\in R$

$2a+b+1$ – мин -?

$a=0$: $f(x) = x+b \geq 0$ $x \geq -b$ – неуд. усл.

$a<0$: $f(x)$ ~~≤ 0 при любых x – неуд. усл.~~ – принимает значения <0 – неуд. усл.

$a>0$: $x_в = \frac{-(a+1)}{2a}$ $y(в) = f\left(-\frac{(a+1)}{2a}\right) = \frac{a(a+1)^2}{4a^2} - \frac{(a+1)^2}{2a} + b = -\frac{(a+1)^2}{4a} + b$

$f(x_в) \geq 0$ $\frac{-(a+1)^2}{4a} + b \geq 0 \Rightarrow b \geq \frac{(a+1)^2}{4a}$

$g(a,b) = 2a+b+1$ $g(x)$ - принимает мин. значения, не учитывая a, при b минимальном $b_{min} = \frac{(a+1)^2}{4a}$

$g(a) \geq 2a + \frac{(a+1)^2}{4a} + 1$

исследуем $g(a)$ на минимальное значение при $a>0$

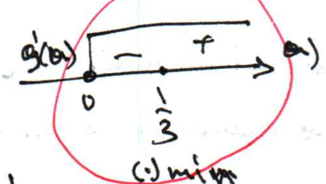
$$g(a) = 2a + \frac{(a+1)^2}{4a} + 1$$

$$g'(a) = 2 + \frac{2(a+1)\cdot \cancel{4}a - \cancel{4}(a+1)^2}{\cancel{16}_{4} a^2} = 2 + \frac{2a^2+2a-a^2-2a-1}{4a^2} =$$

±

$$= 2 + \frac{a^2-1}{4a^2} = \frac{8a^2+a^2-1}{4a^2} = \frac{9a^2-1}{4a^2}$$

$g'(a)=0 \qquad \frac{9a^2-1}{4a^2}=0 \quad \begin{cases} a>0 \\ a\neq 0 \\ a=\pm\frac{1}{3} \end{cases} \quad a=\frac{1}{3}$



$g(a)$ принимает мин. значение при $a=\frac{1}{3}$

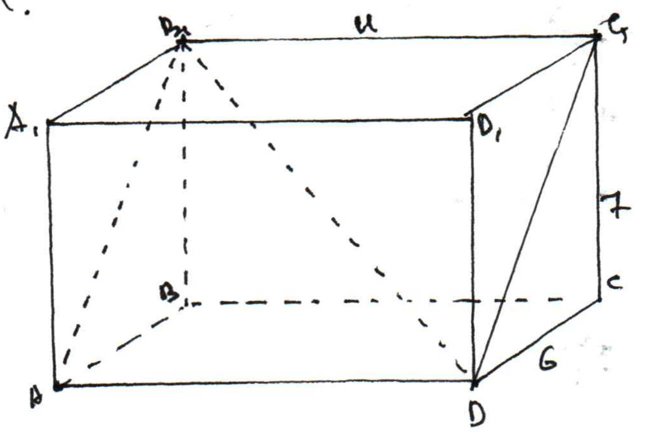
не доказ; что дост.

$$g_{min} = g\left(\tfrac{1}{3}\right) = \cancel{\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}+1} = \frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{\frac{4}{3}} + 1 = \frac{6}{3}+1 = 2+1 = 3$$

б=?

Ответ: 3

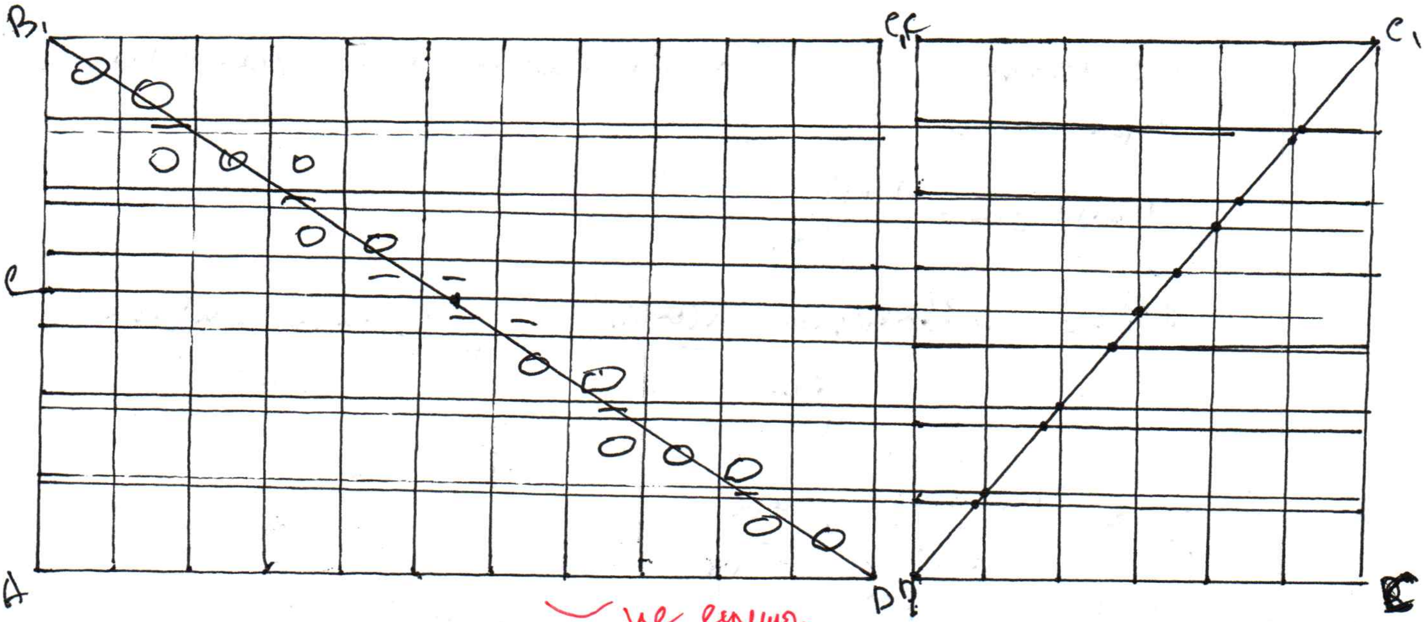
4.



пусть игла проткнула прямоугольник в плоскости проходящей через диагональ и параллельной AD (AB_1C_1D)

Через точки, в которых DC_1 пересекается с целочисленными прямыми плоскости (DD_1C_1), проходят прямые $\parallel AD$, эти прямые делят (AB_1C_1) в тех же отношениях в которых точки делят целочисл. прямые.

Целочисленные прямые составляют ребра единичных ~~куб~~ кубов внутри параллелепипеда.



между каждой линией находится часть единичного куба

Отметим те которые пересекает DB'

рисунок симметричен относительно пересечения l-до середины AB' и DB'

таким образом DB' пересекает 22 единичных куба

Ответ: 22.

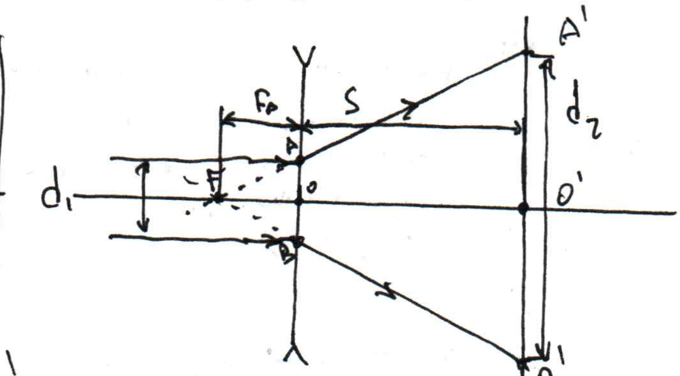
8.

$D_p = -4$ дптр

$d_1 = 5$ см $= 0.05$ м

$d_2 = 20$ см $= 0.2$ м

$D_c - ?$

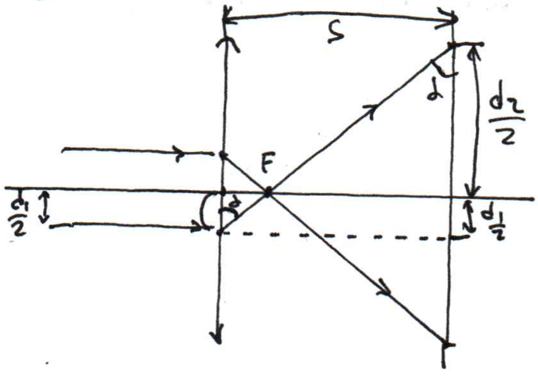


$D = \frac{1}{F}$ $\quad F_p = \frac{1}{D_p} = 0.25$ м

$\triangle FAB \sim \triangle FA'B' \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{FB}{FB'} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{F_p}{F_p + S} \Rightarrow$

$\cancel{\frac{0.05}{0.2} = \frac{0.25 + S}{S} = S = 1 + 4S}$ $\quad \frac{0.05}{0.2} = \frac{0.25}{0.25 + S} = \frac{1}{4}$

$1 = 0.25 + S \Rightarrow S = 0.75$ м



63-11-212

$$\frac{S}{\frac{d_2}{2}+\frac{d_1}{2}} = tg\,\alpha$$

$$\frac{F_c}{\frac{d_1}{2}} = tg\,\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{2S}{d_1+d_2} = \frac{2F_c}{d_1} \Rightarrow$$

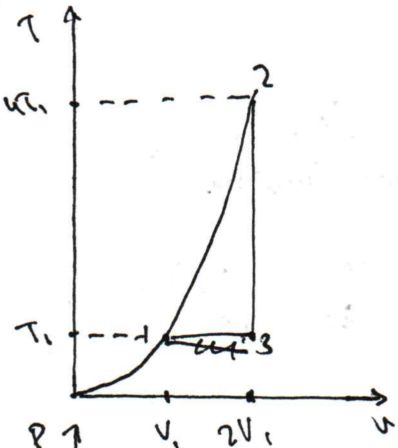
$$F_c = \frac{d_1 \cdot S}{d_1+d_2} = \frac{0.05\cdot 0.75}{0.05+0.2} =$$

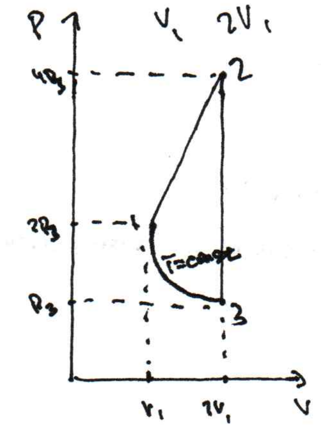
$$= \frac{0.75\cdot 0.05}{0.25} = \frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{3}{20}\ м$$

$$D_c = \frac{1}{F_c} = \frac{20}{3}\ дптр$$

Ответ: $\frac{20}{3}$ дптр

7.





$T_1 = kV_1^2$

$T_2 = kV_2^2 = k(2V)^2 = 4kV_1 = 4T_1$

2-3: V = const

$$\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_3}{T_3} \qquad P_2 = \frac{P_3 T_2}{T_3} = \frac{P_3\, 4\cancel{T_1}}{\cancel{T_1}} = 4P_3$$

3-1: T = const

$$P_1V_1 = P_3V_3 \qquad P_1 = \frac{P_3V_3}{V_1} = \frac{P_3\, 2\cancel{V_1}}{\cancel{V_1}} = 2P_3$$

1-2: $$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$

$$\frac{P_1\cancel{V_1}}{\cancel{k}V_1^{\cancel{2}}} = \frac{P_2\cancel{V_2}}{\cancel{k}V_2^{\cancel{2}}} \Rightarrow \frac{P_1}{V_1} = \frac{P_2}{V_2} \Rightarrow P_2 = \frac{P_1V_2}{V_1} = 2P_1$$

— линейная завис.

$A_{12} = 2{,}16 A_{31}$

$$\eta = \frac{A}{Q_н} \qquad A = A_{12} - A_{31} = A_{12} - \frac{A_{12}}{2{,}16} = \frac{1{,}16}{2{,}16} A_{12}$$

$$Q_н = Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = (P_2-P_1)(V_2-V_1) + \frac{i}{2}\nu R(T_2-T_1) =$$

$$A_{12} = (4P_3-2P_3)(2V_1-V_1) = 2P_3V_1 \qquad PV = \nu RT \quad T_1 = \frac{P_1V_1}{\nu R} = \frac{2P_3V_1}{\nu R}$$

$$\Delta U = \frac{i}{2}\nu R(4T_1-T_1) = \frac{i\cdot 3}{2}\nu RT_1 = \frac{i\cdot 3}{2} 2P_3V_1 = i\cdot 3P_3V_1$$

$$Q_н = 2P_3V_1 + i\cdot 3P_3V_1 = (2+i\cdot 3)P_3V_1$$

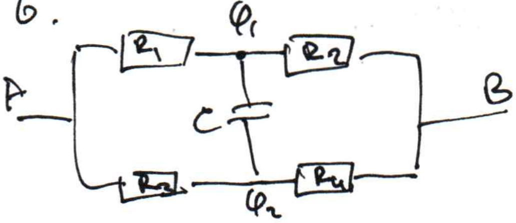
$$\eta = \frac{A_{12}\frac{1{,}16}{2{,}16}}{Q_н} = \frac{1{,}16\cdot 2\cancel{P_3V_1}}{2{,}16\cdot(2+i\cdot 3)\cancel{P_3V_1}} = \frac{2{,}32}{2{,}16(2+i\cdot 3)}$$

для 1-атомного газа $i=3$ $\quad \cancel{\eta = \frac{1.16}{1.08(2+3\cdot3)} = \frac{1.16}{1.08\cdot11} = \frac{1.16}{11.88}}$

$$\eta = \frac{2{,}32}{2.16(2+3\cdot3)} = \frac{2.32}{2.16\cdot11} = 0.091\ldots = \approx 9\%$$

Ответ: 9% для одноатомного газа.

6.



$C = 200\cdot10^{-6}$ Ф
$R_1 = 10$ Ом
$R_2 = 20$ Ом
$R_3 = 30$ Ом
$R_4 = 40$ Ом
$U_0 = 210$ В

$q_c - ?$

$$q_c = U_c C \qquad U_c = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\varphi_1 = I_{12}\cdot R_1 = \frac{U_0 R_1}{R_1+R_2} =$$

$$\varphi_2 = I_{34}\cdot R_3 = \frac{U_0 R_3}{R_3+R_4} =$$

$$U_c = \frac{U_0 R_1}{R_1+R_2} - \frac{U_0 R_3}{R_3+R_4} = U_0\left(\frac{R_1}{R_1+R_2} - \frac{R_3}{R_3+R_4}\right) =$$

$$= 210\left(\frac{10}{10+20} - \frac{30}{30+40}\right) = 210\left(\frac{10}{30} - \frac{30}{70}\right) =$$

$$\frac{210(70-90)}{30\cdot70} = -\frac{210\cdot20}{30\cdot70} = -2 \text{ В.}$$

~~Разницу~~

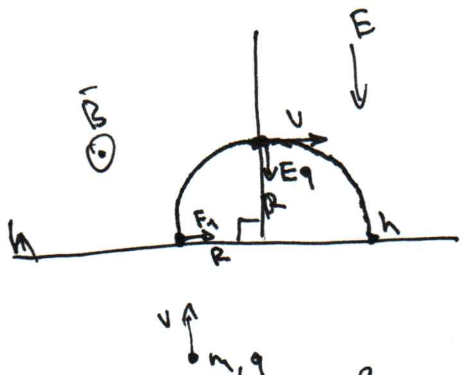
знак напряжения не имеет значения. Он указывает что напр на нижней обкладке конденсатора больше чем на 1-ей.

$$q = C\cdot U = 200\cdot10^{-6}\cdot2 = 400\cdot10^{-6} \text{ Кл}$$

Ответ: 400 мкКл

163-11-212

9.



Частица попала в магнитное поле B и начала двигаться по окружн.

$F_1 = a_ц m \quad BqV = \frac{V^2 m}{R} \Rightarrow R = \frac{Vm}{qB} \quad V = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi R}{V}$

т.к. частица достигла наивысшей точке пройдя четверть окружн.

то $t_1 = \frac{T}{4} = \frac{2\pi R}{4V} = \frac{2\pi m \cancel{V}}{4Bq\cancel{V}} = \frac{\pi m}{2Bq}$

после частица попала в электрическое поле E и под его воздействием начала двигаться вниз

$F_{эл} = ma \quad Eq = ma \Rightarrow a = \frac{Eq}{m}$

до высоты h ей нужно опуститься на R с ускорением a в момент времени $t = t_1$ скорость V была горизонтальна.

$V_y = 0 \quad R = V_y t^0 + \frac{a t_2^2}{2} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2R}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot Vm m}{qBEq}} = \frac{m}{q}\sqrt{\frac{2V}{BE}}$

$t = t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{2Bq} + \frac{m}{q}\sqrt{\frac{2V}{BE}} = \frac{m}{q}\left(\frac{\pi}{2B} + \sqrt{\frac{2V}{BE}}\right)$ скорост V - изначально неизвестна.

а не зная ее мы не сможем вычислить время t.