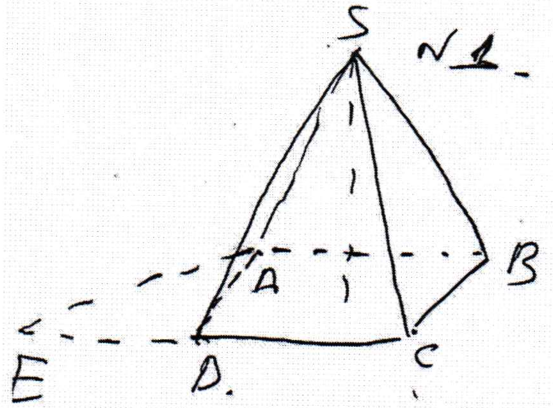
Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 23-11-08

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	11	10	11	10	15	10	6	4	77

Вариант 1

№1.



Дано:

SABCD – пирамида.

$SM:MA = 1:2$.

$SN:ND = 1:3$

$SP:PC = 1:4$.

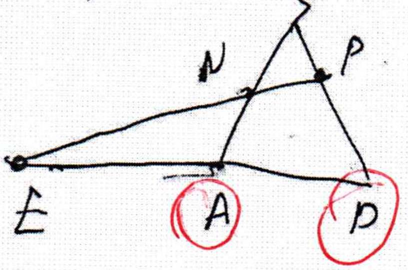
Найти: Отношение.

$SK:KB$ – ?

Решение:

1) В ~~плоскости~~ SCD продлим PN до пересечения с CD.

По теореме Менелая в $\triangle SCD$ с секущей NP



Почему такие буквы?

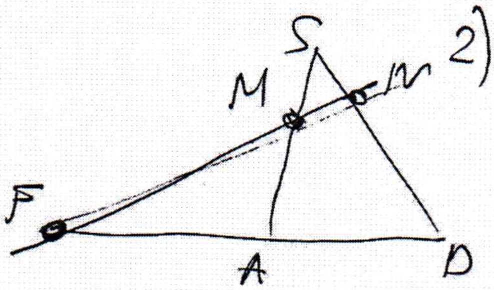
$$\frac{DN}{NS}\cdot\frac{SP}{PC}\cdot\frac{CE}{ED}=1.$$

$$\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{CE}{ED}=1$$

$$\frac{CE}{ED}=\frac{4}{3}\Rightarrow CE=\frac{4}{3}ED$$

$$CD=CE-ED=\frac{1}{3}ED$$

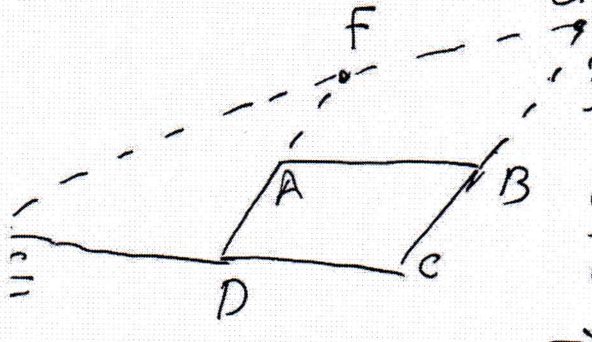
$$\Rightarrow ED=3\cdot CD.$$



2) $\frac{AM}{MS} \cdot \frac{SN}{ND} \cdot \frac{DF}{FA} = 1$

$\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{DF}{FA} = 1 \Rightarrow DF = \frac{3}{2} FA$

$AD = DF - FA = \frac{1}{2} FA \Rightarrow FA = 2AD$

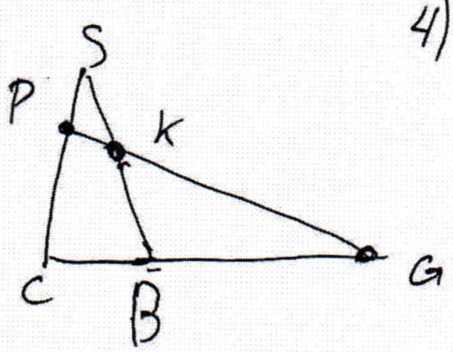


3) ~~AB~~ $AD \parallel BC \Rightarrow FD \parallel CG \Rightarrow$

$\frac{DF}{GC} = \frac{ED}{EC} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow GC = \frac{4}{3} DF = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} FA = 2FA = 4AD =$
$= 4BC$

$BG = CG - BC = 3BC.$



4) Рассмотрим $\triangle BCS$, PG – секущая, $PG \cap BS = K$; P и $G \in MNP$, то K – искомая точка пересечения BS и MN

$\frac{SP}{PC} \cdot \frac{CG}{GB} \cdot \frac{BK}{KS} = 1$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{4BC}{3BC} \cdot \frac{BK}{KS} = 1$

$\frac{SP}{BK} = \frac{1}{3}$

$SP : KB = 1:3.$

−1

$\boxed{\text{Ответ: } 1:3}$

7

№3.

$4^x + \sin^4 y + \ln^6 z = 16$

Пусть $2^x = a$

$\sin^2 y = b$

$\ln^3 z = c$ тогда

$a^2 + b^2 + c^2 = 4^2$ – сфера, ? с координатами

$O(0,0,0)$ – центр $R=4$

$2a + 3b - 6c \leq 28$ – полупространство.

Рассмотрим $2a + 3b - 6c = 28$ плоскость

$2a + 3b - 6c - 28 = 0$ Расстояние от центра сферы до этой плоскости равно

$$= d = \frac{|2\cdot 0 + 3\cdot 0 - 6\cdot 0 - 28|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} = 4$$

Т.к $d = R = 4$, то плоскость касается сферы

$0 + 0 - 0 < 28$ значит, сфера лежит полностью в заданном полупространстве

11 ч.т.д. #

№2.

$$\begin{cases} \dfrac{\log_3 x \cdot \log_4 y}{\log_2 (xy)} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{\log_3 y \cdot \log_{25} z}{\log_3 (yz)} = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{\log_{27} z \log_2 x}{\log_{16} (z\cdot x)} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \\ \log_2 (xy) \neq 0 \\ \log_{16} (zx) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \\ xy \neq 0 \\ yz \neq 0 \\ zx \neq 0 \end{cases}$$

неверно.

3.

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{3}\log_3 xz \, \log_2 x}{\frac{1}{4}\left(\log_2 z + \log_2 x\right)} = 1 \\[2ex] \dfrac{\log_3 x \cdot \frac{1}{2}\log_2 y}{\log_2 x + \log_2 y} = \frac{1}{3} \\[2ex] \dfrac{\log_3 y \, \frac{1}{2}\log_5 z}{\log_5 y + \log_5 z} = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\log_3 x \cdot \frac{1}{2}\,\frac{\log_3 y}{\log_3 2}}{\frac{\log_3 x}{\log_3 2} + \frac{\log_3 y}{\log_3 2}} = \frac{1}{3} \\[3ex] \dfrac{\log_3 y \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_3 z}{\log_3 5}}{\frac{\log_3 y}{\log_3 5} + \frac{\log_3 z}{\log_3 5}} = \frac{3}{5} \\[3ex] \dfrac{\frac{1}{3}\log_3 z \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 2}}{\frac{1}{4}\left(\frac{\log_3 z}{\log_3 2} + \frac{\log_3 x}{\log_3 2}\right)} \end{cases}$$

Пусть $\log_3 x = a$

$\log_3 y = b$

$\log_3 z = c$

тогда →

$$\begin{cases} \dfrac{a \cdot b \cdot \frac{1}{2} \log_2 3}{(a+b) \log_2 3} = \dfrac{1}{3} \\[2ex] \dfrac{b \cdot c \cdot \frac{1}{2} \log_5 3}{(b+c) \log_5 3} = \dfrac{3}{5} \\[2ex] \dfrac{\frac{1}{3} c \cdot a \log_2 3}{(c+a) \cdot \frac{1}{4} \log_2 3} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{ab}{2} = \dfrac{a+b}{3} \\[2ex] \dfrac{bc}{2} = \dfrac{3}{5}(b+c) \\[2ex] \dfrac{ac}{3} = \dfrac{a+c}{4} \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot \dfrac{3}{ab} \\[2ex] \cdot \dfrac{5}{3bc} \\[2ex] \cdot \dfrac{4}{ac} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a} = \dfrac{3}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{5}{6} \\[2ex] \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{a} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{b} \\[2ex] \dfrac{1}{c} = \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{b} \\[2ex] \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 3 \\ c = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 y = 2 \\ \log_3 z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \\ z = 27 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } x = 3,\ y = 9,\ z = 27}$$

(+)

№ 4.

$a_1 = \cos 10^\circ$ $\quad 100^\circ = 90 + 10^\circ$

$a_2 =$ 2) $\cos(90+10)^\circ = -\sin 10^\circ$

3) $\cos(1000^\circ) = \cos 80^\circ = \sin 10^\circ$

4) $\cos(10000^\circ) = \sin 10^\circ$

5) $\cos(100000)^\circ = \sin 10^\circ$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a_{2023} = a_{2024} = \sin 10^\circ$ не доказано.

$a_1 \cdot \cos x + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \cdot \sin x =$

$= \cos 10 \cdot \cos x + (-\sin 10^\circ + \sin 10^\circ + \sin 10^\circ) \cdot \sin x$

$= \cos 10 \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin 10^\circ = \cos(x - 10)$

$\Rightarrow$ $-1 \le \cos x \le 1$ $\Rightarrow$ наименьшее значение выражения -1

$\boxed{\text{Ответ: } -1}$.

(0)

№5.

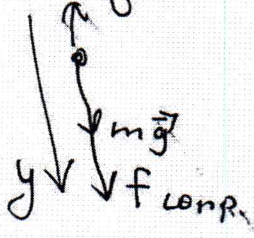
Решение:

Дано:
$g = 10$ м/с

v_0 − ?

Т.к a − не постоянное, в процессе движения действует сила сопротивления, пропорциональная скорости; $f = kv$

Т.к шарик брошен вверх, до остановки в верхней точке траектории расстановка сил имеет вид:



Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр 23-11-08

по $\underline{II}$ закону Ньютона для начального момента времени $ma_0 = mg + kV_0$

Через 2с после начала движения

$a_1 = g = 10 м/с^2 \Rightarrow V = 0$ - в верхней точке.

т.к. $a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \int_{V_0}^{0} \Delta V = -\int_{0}^{2} a \Delta t$ - скорость убывает. Интеграл можно найти как площадь под графиком ускорения за первые 2с $\to$

$V_0 = \frac{1}{2}(20+10) \cdot 2 = 30$ м/с - ускорение изменялось линейно $\to$ искалась площадь трапеции

$\boxed{\text{Ответ: } 30 м/с}$

№6.

Дано:
$L; q_1; q_2;$
$m_1; m_2$

V_1, V_2 - ?

Решение:

По ЗСЭ

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{L} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}$ - считаем, что через большой промежуток времени заряды удалятся на ∞ друг от друга и их потенциальная энергия $= 0$.

По ЗСИ:

$m_1 V_1 - m_2 V_2 = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{m_2}{m_1} \cdot V_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{L} = \frac{\cancel{m_1} \cdot m_2^2 \cdot V_2^2}{2 \cdot m_1^{\cancel{2}}} + \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2} = \frac{m_2 V_2^2}{2}\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)$

$$v_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{L}\cdot\frac{1}{m_2\left(\frac{m_2}{m_1}+1\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{q_1 q_2}{2\pi\varepsilon_0 L\cdot m_2\left(\frac{m_2}{m_1}+1\right)}}$$

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1}\sqrt{\frac{q_1 q_2}{2\pi\varepsilon_0 L m_2\left(\frac{m_2}{m_1}+1\right)}}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } v_1 = \frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{q_1 q_2}{2\pi\varepsilon_0 L\cdot m_2\left(\frac{m_2}{m_1}+1\right)}} \quad v_2 = \sqrt{\frac{q_1 q_2}{2\pi\varepsilon_0 L\cdot m_2\left(\frac{m_2}{m_1}+1\right)}}}$$

№7. Решение:

Дано:

$T = 100°C$

$P_0 = 10^5$ Па

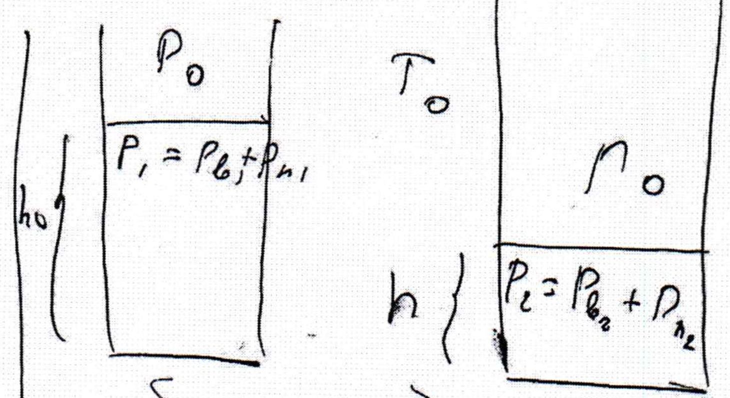
$h_0 = 0{,}3$

$h = 0{,}1$

$P_2 = 2P_1$

$S = 100\cdot 10^{-4}$ м²

$m_п$ — ?



~~Т.к давление воздуха возрастает не равно уменьшению объема, значит, что под поршнем был воздух при температуре окр. среды. Т.к наступает равновесие~~

$P_2 = 2P_1$

$P_1V_1 = P_2V_2$

$P_a \neq \frac{F}{S}$

$A = F_\Delta h$

$F_g = F_{вт}$

$V_1 = h_0 S$

$V_2 = hS$

$\Delta U = Q + A = Q + F_g\,\Delta h$

$\Delta U = \frac{3}{2}P\Delta V = \frac{3}{2}\frac{m}{M}R\Delta T$

Из уравнения Клапейрона

$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$ $\quad T_2 = \frac{P_2V_2T_1}{P_1V_1} = \frac{2hT}{h_0}$

8.

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{2hT}{h_0} - T_1$$

$$\Delta U = \frac{m}{M} R\left(\frac{2hT_1}{h_0} - T_1\right)$$

возвращаемся в первый закон термодинамики

$$\frac{m}{M} R\left(\frac{2hT_1}{h_0} - T_1\right) = mL + pS\Delta h$$

$$\frac{mT_1R(2h-h_0)}{Mh_0} - mL = pS\Delta h$$

$$m\left(\frac{T_1R(2h-h_0)}{Mh_0} - L\right) = pS\Delta h$$

$$m\,\frac{T_1R(2h-h_0) - LMh_0}{Mh_0} = pS\Delta h$$

$$m = \frac{pS\Delta h\, M h_0}{2hT_1R - h_0(T_1R + LM)}$$

$$m = \frac{10^5\,Па \cdot 100 \cdot 10^{-4}\,м^2 \cdot 28{,}98\,г/моль \cdot 0{,}2\,м \cdot 0{,}3\,м}{2 \cdot 0{,}1\,м \cdot 373к \cdot 8{,}31 - 0{,}3\,(373к \cdot 8{,}31 + 2{,}3 \cdot 10^6\,\frac{Дж}{кг} \cdot 28{,}98\,г/моль}$$

$$m \approx 8{,}69 \cdot 10^{-5}\,кг$$

$$\boxed{\text{Ответ: } 8{,}69 \cdot 10^{-5}\,кг}$$

№8.

Проведем побочные оптические оси AA' и BB'.

Т.к. изображение перевернутое уменьшенное, изображение получено в собирающей линзе.

Оптический центр лежит на пересечении побочных оптических осей и по положению (34,37). Для построения плоскости ~~[illegible]~~ линзы воспользуемся крайними лучами идущими из точки A в A' ~~AB и A'B'~~ ~~[illegible]~~ т.е продолжим прямые AB и A_1B_1 и их точки пересечения точка M. Плоскость линзы строится вдоль прямой CM. Перпендикулярно плоскости линзы из точек A и B до пересечения с линзой. После преломления лучи пересекутся в заданном фокусе F (40,38)

С помощью симметрично относительно начала координат строим передний фокус F(30,36)