



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 55-11-79

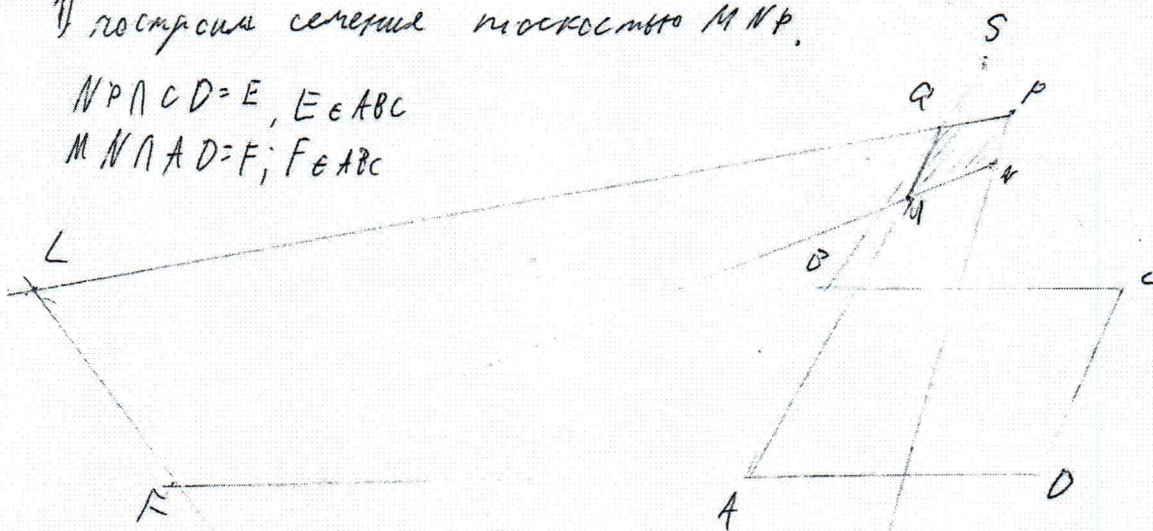
Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	10	10	10	15	4	2	15	78

Вариант 1

1) построим сечение плоскостью MNP .

$$NP \cap CD = E, E \in ABC$$

$$MN \cap AD = F; F \in ABC$$



$$EF \subset ABC; BC \subset ABC$$

$$EF \cap BC = L$$

$$LP \cap SB = Q$$

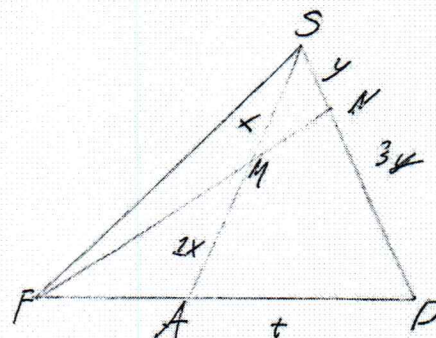
$MNPQ$ - искомое сечение.

$$2) SM = x \quad AM = 2x$$

$$SN = y \quad DN = 3y$$

$$SP = z \quad PC = 4z$$

$$AD = t$$



рассмотрим $\triangle ASD$. По теореме Менелая:

$$\frac{SM}{AM} \cdot \frac{AF}{FD} \cdot \frac{DN}{NS} = 1$$

$$\frac{x}{2x} \cdot \frac{AF}{FD} \cdot \frac{3y}{y} = 1$$

$$\frac{AF}{FD} = \frac{2}{3} \Rightarrow AF = 2t$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 55-11-79

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

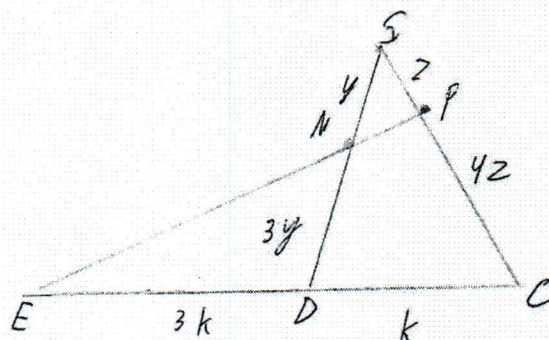
Вариант 1

3) рассмотрим $\triangle SDC$:
по теореме Менелая:

$$\frac{SP}{PC} \cdot \frac{CE}{ED} \cdot \frac{DN}{NS} = 1$$

$$\frac{2}{42} \cdot \frac{CE}{ED} \cdot \frac{3y}{y} = 1$$

$$\frac{CE}{ED} = \frac{4}{3}$$



4) рассмотрим $\triangle EDF$ и $\triangle ECL$

$PD \parallel LC$; т.к. $AD \parallel BC$ (стороны параллелограмма)

поэтому $\triangle EDF \sim \triangle ECL$

$$\frac{ED}{EC} = \frac{FD}{LC}$$

$$\frac{3k}{4k} = \frac{3t}{LC}$$

$$LC = 4t$$

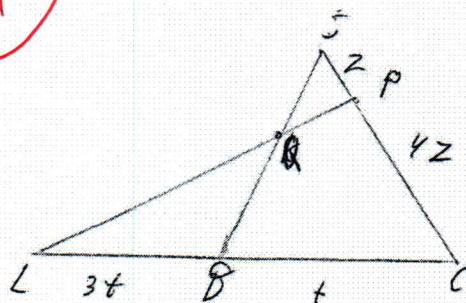
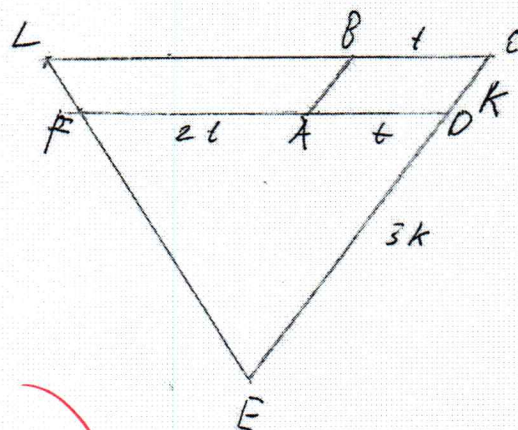
5) рассмотрим $\triangle BSC$
по теореме Менелая:

$$\frac{SP}{PC} \cdot \frac{CL}{BL} \cdot \frac{BS}{KS} = 1$$

$$\frac{2}{42} \cdot \frac{4t}{3t} \cdot \frac{BS}{KS} = 1$$

$$\frac{BS}{KS} = 3$$

Ответ: $3k1$



$$\begin{cases} \frac{\log_3 x \cdot \log_4 y}{\log_2 (xy)} = \frac{1}{3} \\ \frac{\log_3 y \cdot \log_5 z}{\log_5 (yz)} = \frac{3}{5} \\ \frac{\log_{27} z \cdot \log_2 x}{\log_{10} (zx)} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\frac{\lg x}{\lg 3} \cdot \frac{\lg y}{\lg 4}}{\frac{\lg(xy)}{\lg 2}} = \frac{1}{3} \\ \frac{\frac{\lg y}{\lg 3} \cdot \frac{\lg z}{\lg 5}}{\frac{\lg(yz)}{\lg 5}} = \frac{3}{5} \\ \frac{\frac{\lg z}{\lg 27} \cdot \frac{\lg x}{\lg 2}}{\frac{\lg(xz)}{\lg 6}} = 1 \end{cases}$$

$$\lg x = a \quad \lg y = b \quad \lg z = c$$

$$\frac{\frac{a \cdot b}{2 \lg 3 \cdot \lg 2}}{\frac{a+b}{\lg 2}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\frac{b \cdot c}{2 \lg 3 \cdot \lg 5}}{\frac{b+c}{\lg 5}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\frac{c \cdot a}{3 \lg 3 \cdot \lg 2}}{\frac{a+c}{\lg 6}} = 1$$

$$\begin{cases} \frac{a \cdot b}{2 \lg 3 \cdot (a+b)} = \frac{1}{3} \\ \frac{b \cdot c}{2 \lg 3 (b+c)} = \frac{3}{5} \\ \frac{a \cdot c \cdot 4}{3 \lg 3 (a+c)} = 1 \end{cases}$$

OD3?

$$\begin{cases} a \cdot b = \frac{2 \lg 3 (a+b)}{3} \\ 5bc = 6 \lg 3 (b+c) \\ 4ac = 3 \lg 3 (a+c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(b - 2 \lg 3) = \frac{2 \lg 3 \cdot b}{3} \\ b(5c - 6 \lg 3) = 6 \lg 3 \cdot b \\ c(5b - 6 \lg 3) = 6 \lg 3 \cdot b \\ 4ac = 3 \lg 3 (a+c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{2 \lg 3 \cdot b}{3b - 2 \lg 3} \\ b = \frac{6 \lg 3 \cdot b}{5b - 6 \lg 3} \\ 4ac = 3 \lg 3 (a+c) \end{cases}$$

$$\frac{4 \left(\frac{2 \lg 3 \cdot b}{3b - 2 \lg 3} \right) \cdot \left(\frac{6 \lg 3 \cdot b}{5b - 6 \lg 3} \right)}{\frac{4b \cdot b}{(3b - 2 \lg 3)(5b - 6 \lg 3)}} = \frac{3 \lg 3 \left(\frac{2 \lg 3 \cdot b}{3b - 2 \lg 3} + \frac{6 \lg 3 \cdot b}{5b - 6 \lg 3} \right)}{(3b - 2 \lg 3)(5b - 6 \lg 3)}$$

$$8b = 14b - 12 \lg 3$$

$$6b = 12 \lg 3$$

$$b = 2 \lg 3$$

$$\lg y = 2 \lg 3$$

$$y = 9$$

$$a = \frac{2 \lg 3 \cdot 2 \lg 3}{6 \lg 3 - 2 \lg 3} = \frac{4 \lg^2 3}{4 \lg 3} = \lg 3$$

$$\lg x = \lg 3 \quad c = \frac{6 \lg 3 \cdot 2 \lg 3}{5 \cdot 2 \lg 3 - 6 \lg 3} = \frac{12 \lg^2 3}{4 \lg 3} = 3 \lg 3$$

$$x = 3 \quad \lg z = 3 \lg 3 \quad z = 27$$

$$\text{Answer: } x=3; y=9; z=27$$

55-11-79

№ 4

$$a_1 \cos x + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \cdot \sin x$$

$$10^1 \equiv 10^\circ (\text{mod } 360^\circ)$$

$$10^2 \equiv 100^\circ (\text{mod } 360^\circ)$$

$$10^3 \equiv 280^\circ (\text{mod } 360^\circ)$$

$$10^4 \equiv 2800^\circ$$

$$10^4 \equiv 280^\circ (\text{mod } 360^\circ)$$

$$10^n \equiv 280^\circ (\text{mod } 360^\circ) \text{ не надо!}$$

$$a_1 = \cos 10^\circ$$

$$a_2 = \cos 100^\circ$$

$$a_{2023} \equiv \cos 280^\circ$$

$$a_{2024} \equiv \cos 280^\circ$$



$$\begin{aligned} & \cos 10^\circ \cdot \cos x + (\cos 100^\circ + \cos 280^\circ + \cos 280^\circ) \cdot \sin x = \\ & = \cos 10^\circ \cdot \cos x + (\cos 100^\circ + 2 \cos (180^\circ + 100^\circ)) \cdot \sin x = \\ & = \cos 10^\circ \cdot \cos x + (\cos 100^\circ - 2 \cos 100^\circ) \sin x = \cos 10^\circ \cos x + \sin 10^\circ \sin x = \cos (10^\circ - x) \\ & -1 \leq \cos (10^\circ - x) \leq 1; \text{ значит наименьшее значение равно } -1 \end{aligned}$$

№ 5

Ускорение уменьшается под действием силы тяжести

В момент времени 2с ускорение равно 10 м/с^2 , а так как по условию ускорение свободного падения (g), значит тело движется по прямой и остановилось ($v=0$)

На графике зависимости ускорения (a) от времени (t) площадь фигуры под графиком равна изменению скорости (Δv)

Визуально, под графиком длиной во времени, трапеция: $S_{\text{тр}} = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot t$, $a_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot t$

$$S = \frac{20 + 10}{2} \cdot 2 = 30; \text{ значит } \Delta v = 30 \text{ м/с}; \text{ а так как } v = 0 \quad v_0 = \Delta v = 30 \text{ м/с}$$

№ 8.

Изображение $A'B'$ уменьшенное и перевернутое, значит линза собирающая

Проведем прямые AA' и BB' , точка их пересечения будет являться центром линзы, так как лучи проходящие через центр линзы не преломляются

[illegible]

Для определения фокусов линзы проведём из точки А прямо, перпендикулярно линзе; ведь тогда после преломления она пройдет через фокус линзы.

координаты $O(35; 36)$; ~~правая~~ ~~нижняя~~ граница $F_1(40; 39)$; ~~левая~~ ~~верхняя~~ граница $F_n(32; 35)$

N3

Дано: $2^x + \sin^4 y + \ln^6 z = 16$

Док-м: $2^{x+1} + 3 \sin^2 y - 6 \ln^3 z = 28$

$$(2^x)^2 + (\sin^2 y)^2 + (\ln^3 z)^2 = 16$$

Положим $2^x = a, \sin^2 y = b; \ln^3 z = c$

$a > 0; b \geq 0$

Получим $a^2 + b^2 + c^2 = 16$; а так как $a > 0$, то $a = \sqrt{16 - b^2 - c^2}$ и $b^2 + c^2 < 16$

Рассмотрим $2^{x+1} + 3 \sin^2 y - 6 \ln^3 z = 2 \cdot 2^x + 3 \sin^2 y - 6 \ln^3 z =$
 $= 2a + 3b - 6c = 2\sqrt{16 - b^2 - c^2} + 3b - 6c = f(b, c)$

$$f'(b) = \frac{2 \cdot (-2b)}{2\sqrt{16 - b^2 - c^2}} + 3$$

$$f'(c) = \frac{2 \cdot (-2c)}{2\sqrt{16 - b^2 - c^2}} - 6$$

$$\begin{cases} \frac{-2b}{\sqrt{16 - b^2 - c^2}} + 3 = 0 \\ \frac{-2c}{\sqrt{16 - b^2 - c^2}} - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2b}{\sqrt{16 - b^2 - c^2}} = 3 & (1) \\ \frac{2c}{\sqrt{16 - b^2 - c^2}} = -6 & (2) \end{cases}$$

$$(1):(2) = \frac{b}{c} = -\frac{1}{2}$$

$$c = -2b$$

55-11-79

Показатель в $b(1)$

$$\frac{2b}{\sqrt{16-b^2-(2b)^2}} = 3$$

$$2b = 3\sqrt{16-5b^2} \quad ; \text{н.к. } b \geq 0 ; \text{н.к.}$$

$$4b^2 = 9(16-5b^2)$$

$$4b^2 = 9 \cdot 16 - 45b^2$$

$$49b^2 = 9 \cdot 16$$

$$b^2 = \frac{9 \cdot 16}{49}$$

$$b = \frac{3 \cdot 4}{7} = \frac{12}{7} ; \text{н.к. } b > 0$$

$$c = -\frac{24}{7}$$

$\left(\frac{12}{7}, -\frac{24}{7}\right)$ - критическая точка

$$A = f''_{bb} = \frac{-2\sqrt{16-b^2-c^2} + 2b \cdot \frac{1 \cdot (-2b)}{2\sqrt{16-b^2-c^2}}}{16-b^2-c^2} = \frac{-2(16-b^2-c^2) - 2b^2}{(16-b^2-c^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-32+2c^2}{(16-b^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B = f''_{bc} = -2b \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{(-2c)}{(16-b^2-c^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2bc}{(16-b^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$C = f''_{cc} = \frac{-2\sqrt{16-b^2-c^2} + 2c \cdot \frac{1(-2c)}{2\sqrt{16-b^2-c^2}}}{16-b^2-c^2} = \frac{-2(16-b^2-c^2) - 2c^2}{(16-b^2-c^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-32+2b^2}{(16-b^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$AC - B^2 = \frac{(-32+2c^2)(-32+2b^2)}{(16-b^2-c^2)^3} - \frac{4b^2c^2}{(16-b^2-c^2)^3} = \frac{4(b^2c^2 - 16c^2 - 16b^2 + 16^2) - 4b^2c^2}{(16-b^2-c^2)^3} = \frac{16(16-b^2-c^2)}{(16-b^2-c^2)^3} = \frac{16}{(16-b^2-c^2)^2} > 0$$

$$A = \frac{2c^2-32}{(16-b^2-c^2)^{\frac{3}{2}}} < 0 ; \text{н.к. } c^2 < 16 ; 16-b^2-c^2 > 0$$

(+)
(-)
Let go on by
no more
local.
max

значит в точке $(\frac{12}{7}, -\frac{24}{7})$ функция $f(b; c)$ достигает своего максимума

$$f\left(\frac{12}{7}; -\frac{24}{7}\right) = 2 \sqrt{16 - \left(\frac{12}{7}\right)^2 - \left(-\frac{24}{7}\right)^2} + 3 \cdot \frac{12}{7} - 6 \left(-\frac{24}{7}\right) =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{16 - \frac{144}{49} \cdot 5} + \frac{36 \cdot 5}{7} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2}{7} + \frac{180}{7} = \frac{196}{7} = 28$$

Поэтому $2a + 3b - 6c \leq 28$ и $2^{x+1} + 3 \sin^2 y - 6 \ln^2 z \leq 28$

н 7

Дано	Решение.	
$T = 100^\circ\text{C}$	запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для двух случаев	
$p_2 = 2p_1$		
$S = 0,01 \text{ м}^2$	$p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT_1$	$V_1 = Sh_1$
$h_1 = 0,3 \text{ м}$	$p_2 V_2 = \frac{m}{M} RT_2$	$V_2 = Sh_2$
$h_2 = 0,1 \text{ м}$	$p_1 V_1 = p_2 V_2$	
$M = 0,018 \text{ кг/моль}$	$\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{T_1}{T_2}$	
$m_1 = ?$	$T_2 = \frac{p_2 V_2 T_1}{p_1 V_1} = \frac{2p_1 Sh_2 T_1}{p_1 Sh_1} = \frac{2 \cdot 0,1 \cdot 100}{0,3} \approx 66,6 (^\circ\text{C})$	

н 6

Поскольку в задании не указывается в какой среде находятся шарик, будем считать, что они находятся в вакууме.

Между шариками должна действовать сила взаимного отталкивания, так как шарик заряжены одноименно.

После отщипывания первый шарик начнет двигаться с ускорением, направленным вдоль прямой, соединяющей центры обоих шариков. С ускорением будет двигаться и второй шарик. Если считать, что ускорения шариков достаточно малы, можно пренебречь изгибом. Поскольку на шарик после их отщипывания не действуют другие тела, то суммарный импульс шариков должен остаться неизменным.

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0$$

По истечению достаточно большого промежутка времени первый шарик удаляясь на столь большое расстояние от другого, что почти будет пренебречь взаимодействием с ним.

Поэтому на основании закона сохранения энергии можно утверждать, что увеличение кинетической энергии шариков должно быть равно уменьшению их потенциальной энергии.

Потенциал электростатического поля, создаваемого точечным зарядом q в вакууме на расстоянии от него, равен
$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$
; если потенциал бесконечно удаленной от заряда точки считать равным 0, на основании принципа суперпозиции можно утверждать, что в любой момент времени, когда отсутствуют шарик, потенциал электростатического поля, создаваемый другим шариком в точке нахождения первого шарика, равен $\varphi = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 L}$. Следовательно, по истечению достаточно большого времени должно иметь место соотношение

$$q_1 v_1 + \cancel{q_2 v_2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

$$q_1 \cdot \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 L} + q_2 \cdot \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 L} = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$$

$$\frac{q_1^2 + q_2^2}{4\pi\epsilon_0 L} = m_1 v_1^2 + \frac{m_2 \cdot m_1^2 v_2^2}{m_1^2}$$

$$\frac{q_1^2 + q_2^2}{4\pi\epsilon_0 L} = \frac{m_1 v_1^2 (m_2 + m_1)}{m_2}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{m_2 (q_1^2 + q_2^2)}{4 m_1 \pi \epsilon_0 L (m_2 + m_1)}}$$

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{\frac{m_2 (q_1^2 + q_2^2)}{4 \pi \epsilon_0 L \cdot m_1 (m_2 + m_1)}}$$