Лист 1

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

44

шифр 52-09-02

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	12	7	13	10	12	15	8	94

50

Вариант 2

№1

$$\begin{cases} x^2+2=(y+z)^2 \\ y^2+1=(x+z)^2 \\ z^2+1=(x+y)^2 \end{cases}$$

1) $x^2+2=(y+z)^2$
$+\ y^2+1=(x+z)^2$
$z^2+1=(x+y)^2$

$x^2+y^2+z^2+4=y^2+2yz+z^2+x^2+2xz+z^2+x^2+2xy+y^2$

$x^2+y^2+z^2-y^2-2yz-z^2-x^2-2xz-z^2-x^2-2xy-y^2=-4$

$-x^2-y^2-z^2-2yz-2xz-2xy=-4 \mid :(-1)$

$x^2+y^2+z^2+2yz+2xz+2xy=4$

$(x+y+z)^2=4$

$x+y+z=2$ $\qquad$ $x+y+z=-2$ (не подходит по условию задачи)

$x+y=2-z$

$x+z=2-y$

$y+z=2-x$

12

2) $x^2+2=(y+z)^2$
$x^2+2=(2-x)^2$
$4x=2 \mid :4$
$x=\frac{1}{2}$

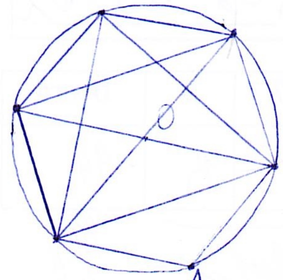
3) $y^2+1=(x+z)^2$
$y^2+1=(2-y)^2$
$4y=3 \mid :4$
$y=\frac{3}{4}$

4) $z^2+1=(x+y)^2$
$z^2+1=(2-z)^2$
$4z=3 \mid :4$
$z=\frac{3}{4}$

Ответ: $x=\frac{1}{2}$; $y=\frac{3}{4}$; $z=\frac{3}{4}$

№3

В качестве примера рассмотрим шестиугольник в котором 5 обычных точек и одна точка A.



Рассмотрим многоугольник, не содержащий точку A. Мы знаем, что многоугольник – это фигура, кол-во вершин, которой превышает числа 2. Глядя на данный многоугольник мы видим, что в нём могут быть многоугольники с 3, 4 и 5 вершинами, при этом с 5 может быть только один, т.к. в него входят все имеющиеся вершины. Теперь рассмотрим многоугольник, содержащий точку A. В нём могут быть многоугольники с 3, 4, 5 и 6 вершинами, при этом с 5 и 6 вершинами могут быть только по одному многоугольнику. Получаем, что в многоугольник, содержащий точку A, входит на один многоугольник больше, чем в многоугольник, который не содержит точку A.

7

По условию задаче нам дано 2025 точек: 2024 обычных и одна точка A.

В многоугольнике без точки A, входят многоугольники начиная с 3 вершин и заканчивая многоугольником с 2024 вершинами, который может быть только один. В многоугольнике с точкой A у нас тоже самое, только в него ещё входит один многоугольник с 2025 вершинами.

Получается, что в многоугольник, содержащий точку A, входит на один многоугольник больше, чем в многоугольник, который не содержит точку A.

Ответ: больше многоугольников, содержащих ~~с точкой~~ у A; на один многоугольник больше.

Лист 2

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 52-09-02

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

№2

	1 кассир	2 кассир
до обеда	$0,75x$	x
после обеда	$1,2y$	y
Всего	$1,1(x+y)$	$x+y$

$0,75x + 1,2y + x + y < 250$ (по усл. задачи)

$$\begin{cases} 0,75x + 1,2y + x + y < 250 \\ 0,75x + 1,2y = 1,1(x+y) \end{cases}$$

1) $0,75x + 1,2y = 1,1(x+y)$

$0,75x - 1,1x = 1,1y - 1,2y$

$-0,35x = 0,1y \mid :(-1)$

$0,35x = 0,1y$

$y = \frac{0,35x}{0,1} = 3,5x$

2) $0,75x + 1,2 \cdot 3,5x + x + 3,5x < 250$

$9,35x < 250$

(*) $9,35x = 250$

$x \approx 26$

$x < 26$

3) $\begin{cases} x < 26 \\ y = 3,5x \end{cases}$

По условию задачи сказано, что кол-во покупателей, которых обслужил 1 кассир, равно $0,75x$. Значит, при умножении x на $0,75$, мы должны получить целое натуральное число, т.к. говорим о людях. Вследствие этого нам подходят числа, которые при умножении на 0.5 дают целое число. Для начала возьмём пять первых чисел:

$x = 24$ $\quad 0,75x = 18$

$x = 22$ $\quad 0,75x = 16,5$

$x = 20$ $\quad 0,75x = 15$

$x = 18$ $\quad 0,75x = 13,5$

$x = 16$ $\quad 0,75x = 12$

12

Мы получаем три подходящих значения: $x=24$; $x=20$; $x=16$.
Исходя из полученной мною системы, мы получили, что $y = 3,5x$.
Значение y должно быть натуральным целым числом. Подставляем.

$x = 24$ $\quad y = 132$ $\qquad x = 16$ $\quad y = 56$

$x = 20$ $\quad y = 70$

2/4

В задаче сказано, что кол-во покупателей, которых обслужил 1 кассир, равно $1,2y$. Это должно быть целое натуральное число. Подставляем полученные значения.

$y = 132 \qquad 1,2y = 158,4$

$y = \underline{70} \qquad 1,2y = \underline{84}$

$y = 56 \qquad 1,2y = 67,2$

Получаем, что $y = 70$, а $x = 20$. Значит:

$0,75x + 1,2y = 15 + 84 = 99$ (пок.) - обслужил 1 ~~кассир~~ кассир.

Ответ: 99

№4.

Дан многочлен $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Он имеет три действительных корня и его старший ~~многочлен~~ коэффициент равен 1, значит мы можем записать его в данной форме

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Также нам дан многочлен $f(g(x)) = f(x^2 + 4x + 2024)$, который не имеет действительных корней. Подставляем в верхний многочлен.

$$f(g(x)) = (g(x) - x_1)(g(x) - x_2)(g(x) - x_3) \neq 0$$

Получаем систему

$$\begin{cases} g(x) - x_1 \neq 0 \\ g(x) - x_2 \neq 0 \\ g(x) - x_3 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 4x + 2024 - x_1 \neq 0 \\ x^2 + 4x + 2024 - x_2 \neq 0 \\ x^2 + 4x + 2024 - x_3 \neq 0 \end{cases}$$

~~Поскольку~~ Так как многочлен $f(g(x))$ не имеет действительных корней, ~~...~~ Получаем систему.

$$\begin{cases} D < 0 \\ D < 0 \\ D < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 16 - 4(2024 - x_1) < 0 \\ 16 - 4(2024 - x_2) < 0 \\ 16 - 4(2024 - x_3) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2024 - x_1 > 4 \\ 2024 - x_2 > 4 \\ 2024 - x_3 > 4 \end{cases}$$

Получаем многочлен: $f(2024) = (2024 - x_1)(2024 - x_2)(2024 - x_3) > 4^3$

$$\Downarrow$$

$$f(2024) > 4^3$$

$$f(2024) > 64$$

13

Ответ: доказано, что $f(2024) > 64$.

Лист 3

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 52-09-02

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

№6

Дано:

$S = 15\ см^3$

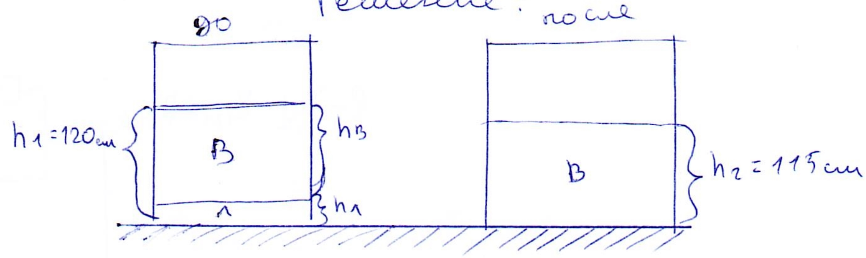
$\rho_В = 1\ г/см^3$

$\rho_Л = 0,9\ г/см^3$

$h_1 = 120\ см$

$h_2 = 115\ см$

Решение:



1) $h_1 = h_В + h_Л = 120\ см$

$V = h \cdot S \qquad \rho = \frac{m}{V}$

$h = \frac{V}{S} \qquad V = \frac{m}{\rho}$

$\Downarrow$

$h = \frac{m}{\rho S}$

$\Downarrow$

$h_1 = \frac{m_В}{\rho_В S} + \frac{m_Л}{\rho_Л S} = 120\ см$

2) $h_2 = h_В = 115\ см$

$h_2 = \frac{m_В + m_Л}{\rho_В S} = 115\ см$

3) $h_1 - h_2 = 5\ см$

$\frac{m_В}{\rho_В S}^{(\rho_Л} + \frac{m_Л}{\rho_Л S}^{(\rho_В} - \frac{m_В + m_Л}{\rho_В S}^{(\rho_Л} = 5\ см$

$\frac{m_Л(\rho_В - \rho_Л)}{\rho_В \cdot \rho_Л \cdot S} = 5\ см$

$m_Л = \frac{5см \cdot \rho_В \cdot \rho_Л \cdot S}{\rho_В - \rho_Л} = \frac{5 \cdot \cancel{0,9}^{9} \cdot 1 \cdot 15}{\cancel{0,1}_{1}}$

$m_Л = 675\ г$

4) $h_2 = \frac{m_В + m_Л}{\rho_В S}$

$m_В = h_2 \cdot \rho_В \cdot S - m_Л = 1050\ г$

Ответ: $m_Л = 675\ г$; $m_В = 1050\ г$

12

3/4

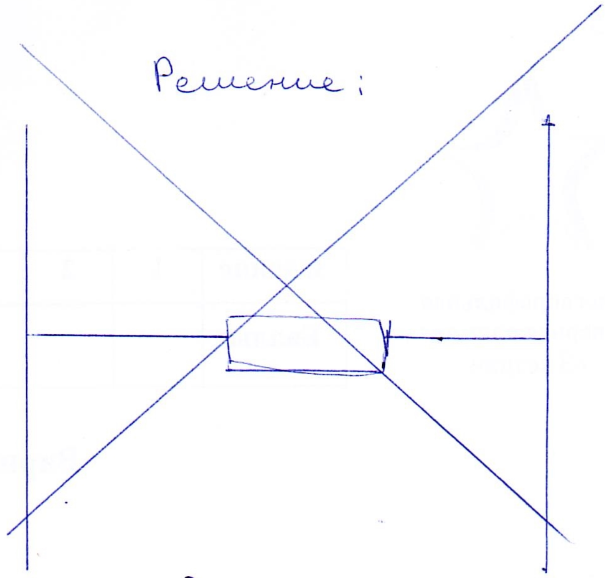
№7

Дано:

$R_0 = 8$ Ом

$R_{общ} - ?$

Решение:

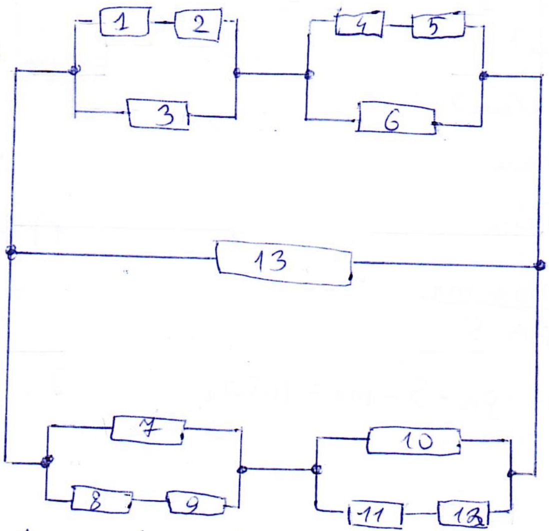


Решение:

$R_I = R_{123} + R_{456}$

$R_{II} = R_{13} = 8$ Ом

$R_{III} = R_{789} + R_{101112}$



$$\frac{1}{R_{общ}} = \frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_{II}} + \frac{1}{R_{III}}$$

1) $\cancel{R_I = R_{123} + R_{456} = \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}\right) + \left(\frac{1}{2R}\right.}$

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_{456}} = \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}\right) = \frac{3}{2R}$$

$$R_{123} = R_{456} = \frac{2R}{3}$$

$$R_I = R_{123} + R_{456} = \frac{4R}{3}$$

2) $R_I = R_{III} = \frac{4R}{3}$

3) $\frac{1}{R_{общ}} = \frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_{II}} + \frac{1}{R_{III}}$

$$\frac{1}{R_{общ}} = \frac{3}{4R} + \frac{1^{\cdot 4}}{\cancel{4}R} + \frac{3}{4R} = \frac{3}{4R} + \frac{4}{4R} + \frac{3}{4R} = \frac{10}{4R}$$

$$\frac{1}{R_{общ}} = \frac{10}{4R}$$

$$R_{общ} = \frac{4R}{10} = \frac{32}{10} = 3{,}2 \text{ Ом}$$

Ответ: $R_{общ} = 3{,}2$ Ом.

15

лист 4

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 52-09-02

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

№5

Дано:

$\alpha = 60^\circ$

$\upsilon_0 = 30$ м/с

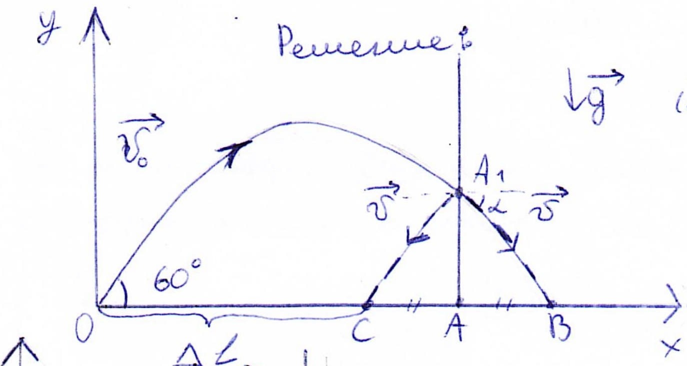
$\upsilon = 20$ м/с

$g = 10$ м/с²

$\Delta l - ?$

I)

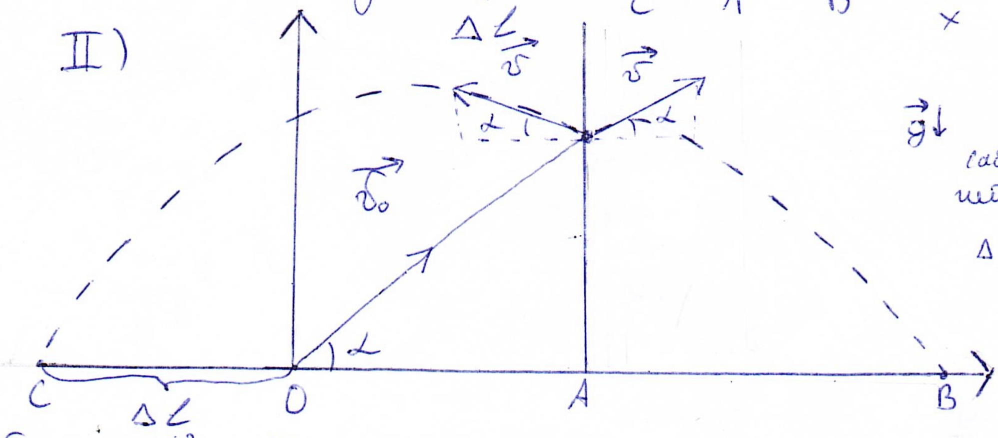
Решение:



AC=AB (абсолютно упругий удар)

$\Delta l = OA - CA = 2OA - OB$

II)



AB = AC (абсолютно упругий удар)

$\Delta l = OB - 2OA$

I $\quad x = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{gt^2}{2} = \upsilon_0 \cos\alpha\, t$

$y = y_0 + \upsilon_{0y} t + \frac{g_y t^2}{2} = \upsilon_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$

$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + gt = \upsilon_0 \cos\alpha$

$\upsilon_y = \upsilon_{0y} + gt = \upsilon_0 \sin\alpha - gt$

$y = 0$

$\Downarrow$

$0 = \upsilon_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$

$t = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$

$\Downarrow$

$x = \frac{\upsilon_0 \cos\alpha \cdot 2 \cdot \upsilon_0 \sin\alpha}{g}$

$x = \frac{\cancel{900}^{90} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cancel{10}_1} = 45\sqrt{3} \approx 76,5$

II $\quad \upsilon_x = \upsilon_0 \cos 60 = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15$ м/с

$\upsilon_y = \pm\sqrt{\upsilon^2 - \upsilon_x^2} = \pm\sqrt{20^2 - 15^2} = \pm 5\sqrt{7} \approx \pm 13$ м/с

t_1: $\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt \Rightarrow t = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha - \upsilon_y}{g}$

$t_1 = \frac{30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 13}{10} = \frac{25,5 + 13}{10} = 3,85$ (с)

4/4

$x_A = v_0 \cos\alpha \cdot t_1 = 3{,}85c \cdot 30 \cdot \frac{1}{2} = 57{,}75$

$x_B = 76{,}5$

$\Delta l = 2 \cdot 57{,}75 - 76{,}5 = 39$ м

$t_2 = \dfrac{30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 13}{10} = \dfrac{25{,}5 - 13}{10} = 1{,}25 (c)$

$x_a = v_0 \cos\alpha \cdot t_2 = \overset{15}{\cancel{30}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot 1{,}25 = 18{,}75$ м

$x_B = 76{,}5$

$\Delta l = 76{,}5 - 18{,}75 \cdot 2 = 39$ м

Ответ: $\Delta l = 39$ м

10

№ 8

Поскольку части светового луча I и II представлены в виде прямых, то их формулы расчёта координат можно представить так: $y = kx + c$

① I луч

$y = kx + c$

x	1	2
y	5	3

$\begin{cases} 5 = k + c \\ 3 = 2k + c \end{cases} \Big| \cdot (-1)$

1) $-5 = -k - c$
$+ \; 3 = 2k + c$
$-2 = k$

2) $5 = -2 + c$
$7 = c$

3) $y = -2x + 7$

② II луч

$y = kx + c$

x	6	7
y	1	2

$\begin{cases} 1 = 6k + c \\ 2 = 7k + c \end{cases} \Big| \cdot (-1)$

1) $-1 = -6k - c$
$+ \; 2 = 7k + c$
$1 = k$

2) $\cancel{y}\ 1 = 6 + c$
$-5 = c$

3) $y = x - 5$

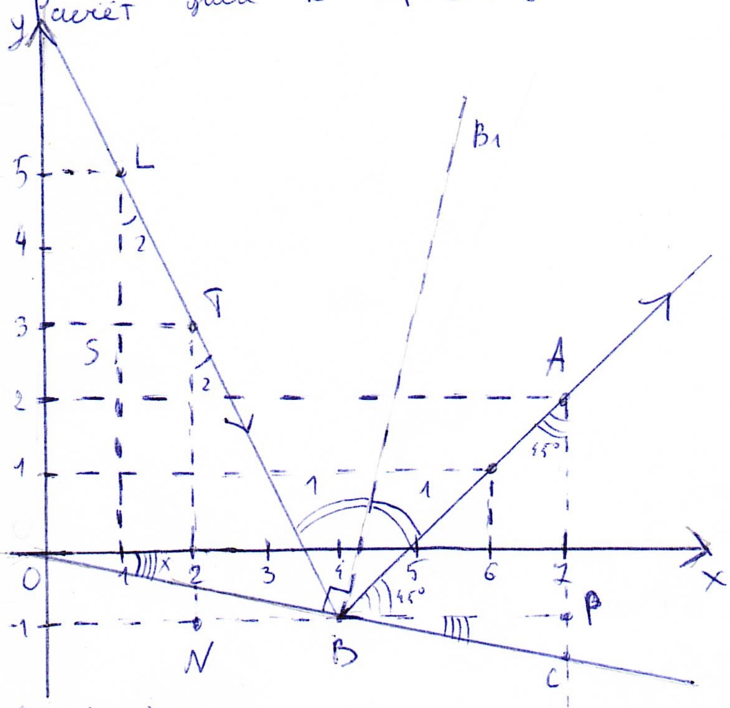
③ $\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = x - 5 \end{cases}$

1) $y = x - 5$

2) $x - 5 = -2x + 7$
$3x = 12 \,|:3$
$x = 4$

3) $y = x - 5$
$y = -1$
$\Downarrow$
Координаты точки отражения $(4; -1)$

Расчёт угла к горизонту, под которым расположено зеркало.



$\angle x = \angle PBC$ — соответствен.

$\angle 1 = \angle 1$ (угол падения равен углу отражения)

1) $\measuredangle \Delta LST$ — прямоуг

$tg \angle 2 = \frac{ST}{LS} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle 2 \approx 27°$

2) $\measuredangle \Delta TNB$ — прямоуг

$\angle NTB = \angle 2 = 27°$ (соответствен.)

$\angle TNB$ — прямой
$\Downarrow$
$\angle NBT = 90 - 27 = 63°$

3) $\measuredangle \Delta APB$ — прямоуг

$AP = BP = 3$ (по чертежу)

$\angle APB = 90°$
$\Downarrow$
$\angle ABP = \angle BAP = 90 : 2 = 45°$

4) $\angle NBP = 180°$ (развёрнутый)

$\angle NBP = \angle NBT + \angle ABP + 2 \cdot \angle 1$

$180° = 63 + 45 + 2\angle 1$

$\angle 1 = 36$

5) $\measuredangle \angle B_1BC$ — прямой

$\angle B_1BA = 32$

$\angle ABP = 45°$

$\Downarrow$
$\angle x = 90° - 32 - 45 = 9°$

Ответ: $(4; -1)$; $\angle x = 9°$

нет пояснений

13