



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 63-11-206

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	9	13	9	0	10	10	15	15	81

Вариант 2

$$1) 7\sqrt{2 - \log_3 x} + 3|2 \log_3 x - 5| \leq 7 \log_3 x + 3|2\sqrt{2 - \log_3 x} - 5|$$

$$7\sqrt{2 - \log_3 x} + 3|2\sqrt{2 - \log_3 x} - 5| \leq 7 \log_3 x + 3|2\sqrt{2 - \log_3 x} - 5|$$

$$f(t) = 7 + 3|2t - 5|$$

$$\begin{cases} 2t - 5 \geq 0 \\ f(t) = 7t - 15 \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq \frac{5}{2} \\ f(t) = 7t - 15 \end{cases} \quad f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{35}{2}$$

$$\begin{cases} 2t - 5 < 0 \\ f(t) = t + 15 \end{cases} \quad \begin{cases} t < \frac{5}{2} \\ f(t) = t + 15 \end{cases} \quad f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{2}$$

$\Rightarrow$ Ф-я непрерывна, монотонно возрастает $\Rightarrow x_2 > x_1$
 $f(x_2) > f(x_1)$

$$f(\sqrt{2 - \log_3 x}) \leq f(\log_3 x)$$

$$\text{обз.} \quad \begin{cases} x > 0 \\ 2 - \log_3 x \geq 0 \\ \log_3 x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x \leq 2 \\ \log_3 x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 9 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [1; 9]$$

$$2 - \log_3 x \leq \log_3^2 x$$

$$\log_3^2 x + \log_3 x - 2 \geq 0$$

$$\begin{cases} \log_3 x \leq -2 \\ \log_3 x \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in [1; 9] \\ x \leq \frac{2}{9} \\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow x \in [3; 9] \quad \text{Итого: } x \in [3; 9]$$

2) Всего раскрасим все меньшие $N = 3^{8 \cdot 14} = 3^{112}$ способами

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

Если левый верхний угол раскрасим либо белым, либо черным, то клетка справа и снизу от него обязательно получит один из этих цветов. И т.д.

$$\text{П.о. } N(A_1) = \underbrace{(2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1)}_{2^{14}} \cdot \underbrace{(1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1 \cdot 2)}_{2^{14}} \cdot \underbrace{(1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \dots)}_{2^7} = (2^7)^6 = 2^{42}$$

Если же левая верхняя клетка серая, то клетка справа и снизу от неё могут быть как белыми, так и серыми. И т.д.,

$$\text{П.е. } N(A_2) = \underbrace{(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1 \cdot 2)}_{2^{14}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1)}_{2^{14}} \cdot \underbrace{(1 \cdot 2 \cdot \dots)}_{2^7} = (2^7)^6 = 2^{42}$$

$$\text{Тогда } N(A) = N(A_1) + N(A_2) = 2^{42} + 2^{42} = 2^{43}$$

$$\neq 2^{43}$$

$$p(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{2^{43}}{3^{44}} = 2 \cdot \frac{2^{42}}{3^{44}} = 2 \cdot \frac{2^{42}}{9^{42}} = 2 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{42}$$

$$\text{Ответ: } p(A) > 2 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{42}$$

$$3) f(x) = ax^2 + (3a+1)x + b \quad \text{Напрям. зн.} \Rightarrow a > 0; \Delta \leq 0$$

$$\Delta = 9a^2 + 6a + 1 - 4ab$$

$$4a+b \rightarrow \text{нам.} \quad 4a+b=g \quad b=g-4a$$

$$\Delta = 9a^2 + 6a + 1 - 4ag + 16a^2 = 25a^2 + 6a + 1 - 4ag$$

$$25a^2 + 6a + 1 - 4ag \leq 0$$

$$4ag \geq 25a^2 + 6a + 1 \quad g \geq \frac{25}{4}a + \frac{6}{4} + \frac{1}{4a}$$

$$f(a) = \frac{25}{4}a + \frac{6}{4} + \frac{1}{4a} \quad f'(a) = \frac{25}{4} - \frac{1}{4a^2}$$

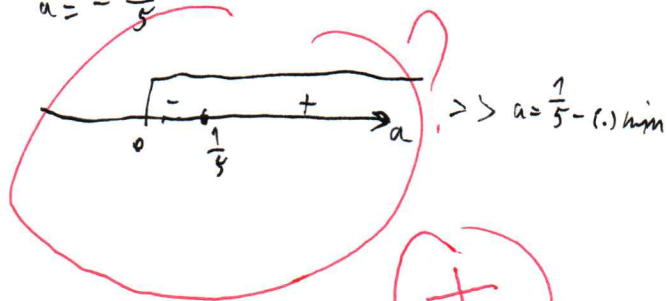
$$f'(a) = 0 \quad \frac{1}{4a^2} = \frac{25}{4}$$

$$\frac{1 - 25a^2}{4a^2} = 0$$

$$25a^2 = 1$$

$$a = \pm \frac{1}{5}$$

$$a \neq 0$$



Очевидно

$$a = \frac{1}{5} - \text{наименьш. зн. } f(a) \text{ при } a > 0 \quad \text{самый,}$$

$$g \geq f(a) \quad g_{\text{нам}} = f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{6}{4} + \frac{5}{4} = 4 \quad \text{Ответ: } g_{\text{нам}} = 4.$$

нужны доказательства.

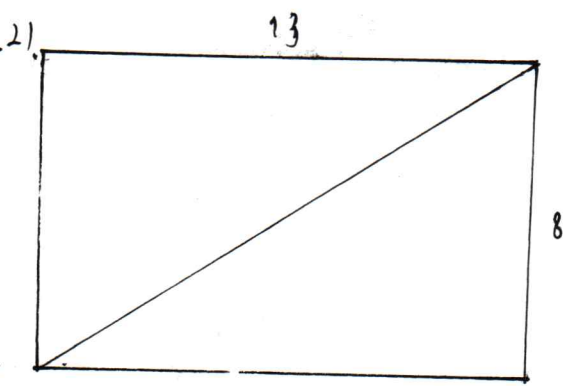
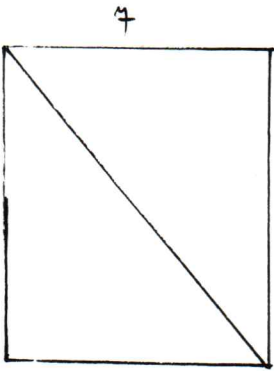
В-?

11-11-412

163-11-206

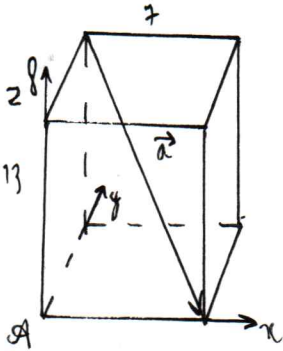
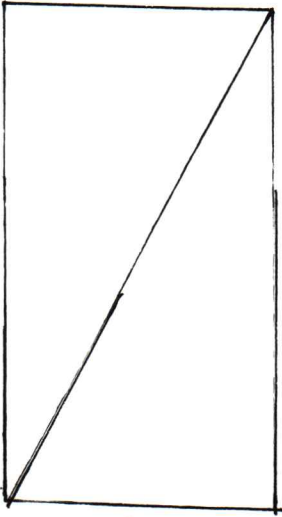
4) 12

8



3)

13



Регіон CO с у. б (с) А

$$\vec{a} \{7; -8; -13\}$$

Розра зег. кривиха упрямую: $7+8+13=28$

Смелен: 28.

5) дано:

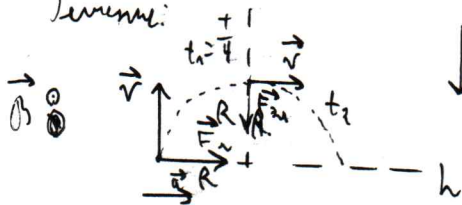
m, q, ω

$t = 0, h$

B, E

$t_0 = ?$

Решение:



$$t_0 = t_1 + t_2$$

$$qvB = m\omega^2 R$$

$$1) F_a = m a_y \quad F_a = q v B \quad v = \omega R \quad a_y = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \quad q v B = \frac{m v^2}{R} \quad R = \frac{m v}{q B}$$

$$q v B = m \omega^2 R \quad \omega = \frac{B q}{m} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{q B} \quad t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi m}{2 q B}$$

$$2) F_{ax} = m a \quad F_{ax} = E q \quad E q = m a \quad a = \frac{E q}{m} \quad R = \frac{a t_2^2}{2} \quad t_2 = \sqrt{\frac{2 R \cdot m}{E q}} = \sqrt{\frac{2 m^2 v}{E q}}$$

авт. то конвен. время забвения от начальной v , м.к. от того забвения R , как конвен. то
логично рассуждения $\Rightarrow$ предположим, что v дано. $t = \frac{\pi m}{2 q B} + m \sqrt{\frac{2 v}{E q}}$ Смелен: $t = \frac{\pi m}{2 q B} + m \sqrt{\frac{2 v}{E q}}$

6) Dato:

$$C = 500 \cdot 10^{-6} \text{ F}$$

$$R_1 = 20 \text{ k}\Omega$$

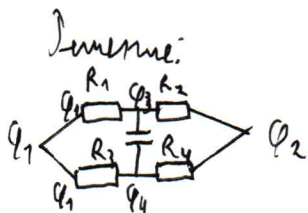
$$R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 40 \text{ k}\Omega$$

$$R_4 = 30 \text{ k}\Omega$$

$$U_0 = 420 \text{ V}$$

$q = ?$



Задача: найти заряд конденсатора на узлах, $U = |q_3 - q_4|$ $C = \frac{q}{U} \Rightarrow q = CU$

$$U_0 = q_2 - q_1 \quad I_{12} = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{420}{20 + 10} = 14 \text{ A} \quad I_{34} = \frac{U_0}{R_3 + R_4} = \frac{420}{40 + 30} = 6 \text{ A}$$

$$U_1 = \frac{q_1 - q_3}{C} = I_{12} \cdot R_1 = 280 \text{ V} \quad q_3 = q_1 - I_{12} R_1$$

$$U_3 = q_1 - q_4 = I_{34} R_3 \quad q_4 = q_1 - I_{34} R_3$$

$$U = |q_3 - q_4| = |q_1 - I_{12} R_1 - q_1 + I_{34} R_3| = |6 \cdot 40 - 14 \cdot 20| = 40 \text{ V}$$

$$q = CU = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Кл} = 20 \text{ мКл.}$$

Ответ: $q = 20 \text{ мКл.}$

7) Dato:

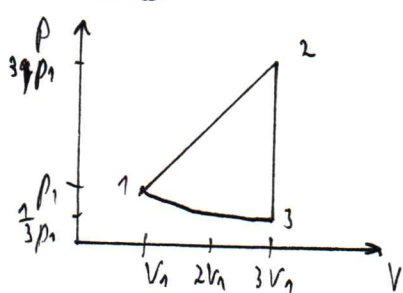
$$T_2 = k V_2^2$$

$$V_3 = 3 V_1$$

$$A_{12} = 3,64 \cdot A_{31}$$

$q = ?$

Задача:



$$T_{12} = \text{const} \Rightarrow p_1 V_1 = \text{const}$$

$$pV = \nu RT$$

$$p_1 V_1 = \nu R k T_1 \quad p_2 V_2 = \nu R k T_2 \Rightarrow p_2 = q V_2 \quad q = \nu R k$$

$$p_1 = q V_1 \quad p_2 = q V_2 = 3 q V_1 = 3 p_1$$

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{heat}}} \quad Q_{\text{heat}} = Q_{12} \quad Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} \quad \Delta U_{12} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T \quad A_{12} = \frac{p_1 + 3p_1}{2} \cdot (3V_1 - V_1) = 4 p_1 V_1$$

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} \nu R T_2 - \frac{1}{2} \nu R T_1 = \frac{3}{2} \cdot 3 p_1 V_1 + \frac{3}{2} \cdot 3 p_1 V_1 - \frac{1}{2} p_1 V_1 = 12 p_1 V_1 = 4 p_1 V_1$$

$$A_{12} = 12 p_1 V_1$$

$$A = A_{12} - A_{31} = 3,64 \quad A_{31} = \frac{A_{12}}{3,64} \quad A = A_{12} - \frac{A_{12}}{3,64} = \frac{2,64 A_{12}}{3,64} = \frac{2,64 \cdot 4 p_1 V_1}{3,64}$$

$$\eta = \frac{2,64 \cdot 4 p_1 V_1}{3,64 \cdot 16 p_1 V_1} = \frac{2,64}{3,64 \cdot 4} = \frac{0,56}{3,64} = \frac{56}{364} = \frac{33}{182}$$

$$\eta = \frac{33}{182} \cdot 100\% = \frac{3300}{182}\% = \frac{1650}{91}\% =$$

$$= 18 \frac{12}{91}\% \approx 18,1\%$$

Ответ: $\eta \approx 18,1\%$

8) Dato:

$$F_p = -5 \text{ Н}$$

$$d_1 = 6 \text{ см}$$

$$d_2 = 12 \text{ см}$$

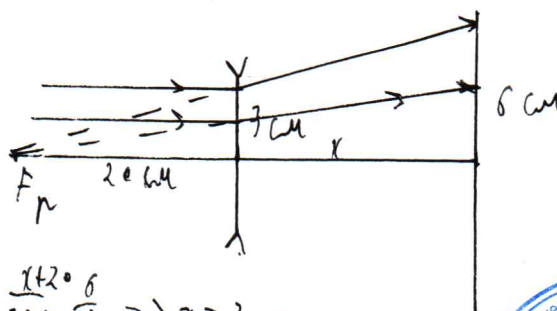
$x_p = ?$



$$F_p = \frac{1}{x_p} \quad F_p = \frac{1}{x_p} = -0,2 \text{ Н} = -20 \text{ см}$$

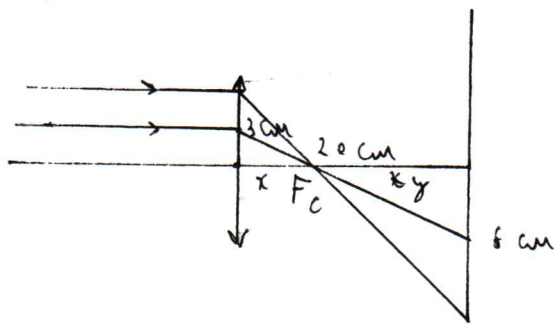
$$d_1 = 2r_1 \Rightarrow r_1 = 3 \text{ см}$$

$$d_2 = 2r_2 \Rightarrow r_2 = 6 \text{ см}$$



$$\frac{x + 20}{20} = \frac{6}{12} \Rightarrow x = 20 \text{ см}$$





$$\begin{cases} \frac{3}{x} = \frac{6}{y} \\ x + y = 20 \end{cases} \begin{cases} y = 2x \\ x + y = 20 \end{cases} \begin{cases} y = 2x \\ 3x = 20 \end{cases} \begin{cases} y = 2x \\ x = \frac{20}{3} \text{ cm} = F_c \end{cases}$$

$$F_c = \frac{0,2}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ Dmmp.}$$

Answer: $F_c = 15 \text{ Dmmp.}$

