шифр 02-10-47

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Вариант 1

№1

$9\sqrt{8-7x} - 2|4x-7| \le 9x - 2|4\sqrt{8-7x}-7|$

ОДЗ: $8-7x \ge 0, \Rightarrow 7x \le 8;\ x \le \frac{8}{7}$.

Тогда $4x-7 \le 4\cdot\frac{8}{7} - 7 < 0, \Rightarrow |4x-7| = 7-4x$.

Тогда неравенство принимает вид $9\sqrt{8-7x} - 2(7-4x) \le 9x - 2|4\sqrt{8-7x}-7|$;

$9\sqrt{8-7x} + \cancel{8x} - 14 \le \overset{x}{\cancel{9x}} - 2|4\sqrt{8-7x}-7|$; $9\sqrt{8-7x} + 2|4\sqrt{8-7x}-7| \le x+14$

Для удобства сделаем замену: $\sqrt{8-7x} = t$, $t \ge 0$. Тогда $8-7x = t^2$; $x = \frac{8-t^2}{7}$.

$9t + 2|4t-7| \le \frac{8-t^2}{7} + 14$

а) $t \ge \frac{7}{4}, \Rightarrow x \le \frac{8-(\frac{7}{4})^2}{7} = \frac{8-\frac{49}{16}}{7}$. Тогда $9t + 2(4t-7) \le \frac{8-t^2}{7} + 14$; $17t \le \frac{8-t^2}{7} + 28$; $|\cdot 7$

$\Rightarrow 4t-7 \ge 0$;

$8 - t^2 + 196 \ge 119t$; $t^2 + 119t - 204 \le 0$; $t_в = \frac{-119}{2} < \frac{7}{4}, \Rightarrow$ при $t \ge \frac{7}{4}$ функция возрастает (парабола с ветвями вверх), $\Rightarrow \min(t^2+119t-204) = ((\frac{7}{4})^2 + 119\cdot\frac{7}{4} - 204) > 0$,

т.к. $\frac{119\cdot 7}{4} = \frac{833}{4} > 204$, $\Rightarrow$ решений нет.

б) $t < \frac{7}{4}, \Rightarrow 4t-7 < 0, \Rightarrow 9t + 2(7-4t) \le \frac{8-t^2}{7} + 14$; $t \le \frac{8-t^2}{7}$; $8 - t^2 \ge 7t$;

$t^2 + 7t - 8 \le 0$; $(t-1)(t+8) \le 0$. Решим методом интервалов:

$+ \quad -8 \quad - \quad 1 \quad +$ $\quad t = [-8; 1]$.

Т.к. $t \ge 0$, то $t = [0; 1]$; т.к. $t < \frac{7}{4}$, то $t = [0; \frac{7}{4})$, т.е. $0 \le t < \frac{7}{4}$, но $t = \sqrt{8-7x}$,

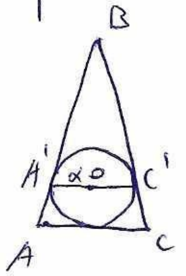
т.е. $\begin{cases} \sqrt{8-7x} \ge 0 \text{ — при всех } x \in \text{ОДЗ} \\ \sqrt{8-7x} < \frac{7}{4}, \Rightarrow \text{т.к. обе части} \ge 0 \text{ можем возвести в квадрат.} \end{cases}$

$8-7x<\frac{49}{16}$; $7x>8-\frac{49}{16}$; $x>\frac{8-\frac{49}{16}}{7}=\frac{8\cdot16-49}{16\cdot7}=\frac{128-49}{112}=\frac{79}{112}$; но по ОДЗ,

$x\le\frac{8}{7}$, $\Rightarrow$ ответ: $\left(\frac{79}{112};\frac{8}{7}\right]$.

№2

Заметим, что диаметр вписанной окружности меньше AB, AC и BC. Действительно, пусть это не так и диаметр больше одной из сторон (AC). Тогда проведём через



точку O прямую α параллельную AC, (т.к. O — центр вписанной окружности, $\Rightarrow$ лежит внутри ΔABC) $AB\cap\alpha=A'$, $BC\cap\alpha=C'$. Тогда $\angle BAC=\angle BA'C'$, $\Rightarrow \Delta BA'C' \sim \Delta BAC$ по двум углам. Тогда $\frac{A'C'}{AC}=\frac{BA'}{BA}<1$, $\Rightarrow$ диаметр меньше. Противоречие.

Тогда пусть диаметр равен a, а стороны равны $a+d, a+2d, a+3d$ (арифм. прогрессия). Заметим, что $S=p\cdot r$, где p — полупериметр $=\frac{3a+6d}{2}=1{,}5a+3d=\boxed{=9+3d}$, $r=\frac{a}{2}=3$, т.к. по условию $a=6$.

Также, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a,b,c — стороны треугольника. Приравняем:

$$(9+3d)\cdot3=\sqrt{(9+3d)\cdot(9+3d-6-d)\cdot(9+3d-6-2d)\cdot(9+3d-6-3d)};$$

$$(9+3d)\cdot3=\sqrt{(9+3d)\cdot(3+2d)\cdot(3+d)\cdot3}$$

$$\frac{\cancel{(9+3d)}^2}{\cancel{3}}\cdot9=\cancel{(9+3d)}\cdot(3+2d)\cdot\cancel{(3+d)}\cdot\cancel{3};\ 3+2d=9;\ d=3.$$ Тогда $P=3a+6d=3\cdot6+6\cdot3=\boxed{36}$.

Проверим такой треугольник на существование: ~~ст~~ стороны равны 9, 12, 15 — неравенство треугольника соблюдается: $9+12>15$, $9+15>12$, $12+15>9$.

Проверка: $S=p\cdot r=18\cdot3=54$; $S=\frac{9\cdot12}{2}=54$ (т.к. треугольник прямоугольный — пифагорова тройка [3,4,5]).

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр 02-10-47

<u>№3</u>

$a,b,c,d>0$

$$\begin{cases} (1)\ a+\frac{1}{b}=1 \\ (2)\ b+\frac{1}{c}=4 \\ (3)\ c+\frac{1}{d}=1 \\ (4)\ d+\frac{1}{a}=4 \end{cases}$$

Из (1), $\frac{1}{b}=1-a, \Rightarrow b=\frac{1}{1-a}$ $a\neq 1$

Из (3), $\frac{1}{d}=1-c, \Rightarrow d=\frac{1}{1-c}$. $c\neq 1$

Тогда:
$$\begin{cases} (2)\ b+\frac{1}{c}=4, \Rightarrow \frac{1}{1-a}+\frac{1}{c}=4, \Rightarrow \frac{1}{c}=4-\frac{1}{1-a};\ c=\frac{1}{4-\frac{1}{1-a}}=\frac{1}{\frac{4(1-a)-1}{1-a}}= \\ =\frac{1-a}{4-4a-1}=\frac{1-a}{3-4a}=\frac{a-1}{4a-3} \quad a\neq\frac{3}{4} \\ (4)\ d+\frac{1}{a}=4, \Rightarrow \frac{1}{1-c}+\frac{1}{a}=4 \end{cases}$$

(4): $\frac{1}{1-\frac{a-1}{4a-3}}+\frac{1}{a}=4;\ \frac{1}{\frac{4a-3-a+1}{4a-3}}+\frac{1}{a}=4;\ \frac{4a-3}{3a-2}+\frac{1}{a}=4;\ |\cdot(3a-2)\cdot a$ $a\neq\frac{2}{3}$

$a(4a-3)+(3a-2)=4a(3a-2)$

$4a^2-\cancel{3a}+\cancel{3a}-2=12a^2-8a;\ 8a^2-8a+2=0;\ 4a^2-4a+1=0;\ (2a-1)^2=0, \Rightarrow a=\frac{1}{2}.$

Тогда $b=\frac{1}{1-a}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2;\ c=\frac{a-1}{4a-3}=\frac{1-a}{3-4a}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2};$

$d=\frac{1}{1-c}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

Ответ: $a=\frac{1}{2};\ b=2;\ c=\frac{1}{2};\ d=2$

<u>№5</u>

Дано: $S=20$ м
$H=3$ м
$v=20\ \frac{м}{с}$
$h=2{,}15$ м
$d=35$ см $=0{,}35$ м
$g=10\ \frac{м}{с^2}$

$\alpha - ?$

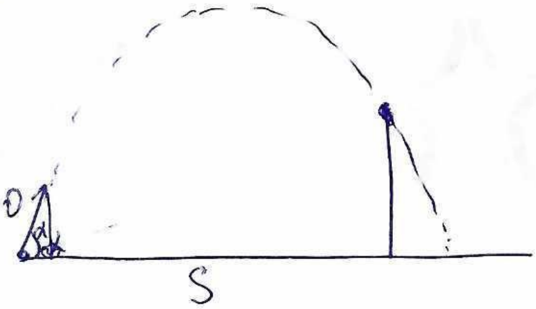
Решение: $h_{max}=h+d=2{,}15\text{ м}+0{,}35\text{ м}=2{,}5\text{ м}, \Rightarrow h_k \geq h_{max}=2{,}5$

для того, чтобы гол был забит, $H>h_k>h_{max}=2{,}5$ м.

Найдём зависимость $h(t)$: $h=v_y t-\frac{gt^2}{2}=$

$=v\cdot\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2};$

№5 (продолжение)



Чтобы найти h_k в момент пересечения линии ворот, найдём t как

$t = \frac{S}{v_x} = \frac{S}{v\cdot\cos\alpha}$.

Тогда: $h_k = \cancel{v}\cdot\sin\alpha\cdot\frac{S}{\cancel{v}\cdot\cos\alpha} - \frac{g}{2}\cdot\left(\frac{S}{v\cdot\cos\alpha}\right)^2 =$

$= S\cdot tg\alpha - \frac{g}{2}\cdot\frac{S^2}{v^2\cdot\cos^2\alpha}$. Подставим значения из условия:

$h_k = 20\cdot tg\alpha - 5\cdot\frac{400}{\cancel{400}\cdot\cos^2\alpha} = 20tg\alpha - \frac{5}{\cos^2\alpha} = \frac{20\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{5}{\cos^2\alpha} =$

$= \frac{20\sin\alpha\cos\alpha - 5}{\cos^2\alpha}$. Как сказано ранее, $2{,}5 < h_k < 3$, =>

(1) $\frac{20\sin\alpha\cos\alpha - 5}{\cos^2\alpha} > 2{,}5$; $40\sin\alpha\cos\alpha - 10 > 5\cos^2\alpha$; $40\sin\alpha\cos\alpha > 5\cos^2\alpha + 10$

$8\sin\alpha\cos\alpha > \cos^2\alpha + 2$

(2) $\frac{20\sin\alpha\cos\alpha - 5}{\cos^2\alpha} < 3$; $20\sin\alpha\cos\alpha < 3\cos^2\alpha + 5$; $40\sin\alpha\cos\alpha < 6\cos^2\alpha + 10$

Заметим, что слева возрастающая функция ($k\cdot\sin(2\alpha)$), а справа — убывающая ($k\cdot\cos^2\alpha + b$) при $\alpha \le 45°$. Заметим, что при $\alpha = 45°$ (1) ~~уравнение~~ неравенство неверно, => $\alpha < 45°$. Тогда нам достаточно найти точки достижения равенства: $8\sin\alpha\cos\alpha = \cos^2\alpha + 2$. Пусть $\cos\alpha = x$ ($x > 0$, т.к. $\alpha < 45°$) =>

$8x\sqrt{1-x^2} = x^2 + 2$; $64x^2(1-x^2) = x^4 + 4x^2 + 4$; $\overset{60x^2}{\cancel{64x^2}} - 64x^4 = x^4 + \cancel{4x^2} + 4$,

$65x^4 - 60x^2 + 4 = 0$; $t = x^2$ ($t > 0$), $D = 3600 - 16\cdot65 = 2560$, $t > 0$, => $t = \frac{\pm\sqrt{2560} + 60}{130} =$

$= \frac{\pm16\sqrt{10} + 60}{130}$, но $\frac{-16\sqrt{10} + 60}{130} < (\cos^2\alpha) = \frac{1}{2}$, => $x = \sqrt{\frac{16\sqrt{10} + 60}{130}}$

< 1, т.к. $\sqrt{2560} < \sqrt{3600} = 60 < \frac{1}{2}\cdot130$, =>

$\alpha_1 = \arccos\left(\sqrt{\frac{16\sqrt{10} + 60}{130}}\right)$

Аналогично, $20x\sqrt{1-x^2} = 3x^2 + 5$; $400x^2(1-x^2) = 9x^4 + 30x^2 + 25$;

$\underset{370x^2}{\cancel{400x^2}} - 400x^4 = 9x^4 + \cancel{30x^2} + 25$; $409x^4 - 370x^2 + 25 = 0$; $D = 370^2 - 4\cdot409\cdot25 = 96000$;

$409t^2 - 370t + 25 = 0$

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр 02-10-47

№5 (продолжение)

$t = \frac{\pm\sqrt{96000}+370}{818} = \frac{\pm 10\sqrt{960}+370}{818}$; Аналогично, т.к. $\frac{-10\sqrt{960}+370}{818} < \frac{1}{2}$, $\Rightarrow$

$\cos\alpha_2 = \sqrt{\frac{10\sqrt{960}+370}{818}}$, $\Rightarrow$ $\alpha_2 = \arccos\left(\sqrt{\frac{10\sqrt{960}+370}{818}}\right)$.

Заметим, что нам подойдет любой угол из диапазона $(\alpha_1; \alpha_2)$

Ответ: $\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{16\sqrt{10}+60}{130}}\right); \arccos\left(\sqrt{\frac{10\sqrt{960}+370}{818}}\right)\right)$

№6

Дано: $\eta = 0,4$
$m = 2кг$
$t_0 = 0°C$
$t_1 = 0°C$
$C_в = 150\ \frac{кДж}{К}$
$\lambda = 330\ \frac{кДж}{кг}$

ΔT - ?

Решение:
Т.к. машину запустили в обратном направлении, то потери энергии внутри машины остаются такие же, т.е. $\eta_2 = \eta = 0,4$.
Тогда $Q_з$ - теплота, дошедшая до воздуха, $Q_з = Q_{вод}\cdot\eta$;

$Q_{вод} = mc_в\Delta t + m\lambda$; т.к. $\Delta t = t_1 - t_0 = 0°C$, то

$Q_{вод} = m\lambda$; $Q_з = \Delta T\cdot C$, $\Rightarrow$ $\Delta T = \frac{m\lambda\cdot\eta}{C} = \frac{2кг\cdot 330\frac{кДж}{кг}\cdot 0,4}{150\frac{кДж}{К}}$.

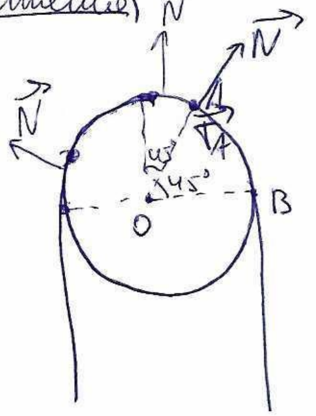
$= \frac{264}{150} = \frac{88}{50} = \frac{176}{100} = 1,76\ (К)$. Т.к. градусы °C линейно зависят от К, то $\Delta T = 1,76°C$

Ответ: 1,76°C

№7

Т.к. ось блока О горизонтальна, то $\vec{g}$ действует на каждый ровно вертикально.
Тогда: (см. след. стр.)

№7 (продолжение)



Дано: $m=2$ кг

$l=1,5$ м

$\angle AOB=45°$

$R=8$ см $=0,08$ м.

Найти: $\vec{T}_A$

Решение: Найдём центры масс кусочков справа и слева от точки A, затем запишем ~~правило моментов относительно~~ второй закон Ньютона относительно на касательную AA, т. A ~~и окружности O~~. тогда, т.к. $\vec N$ перпендикулярна касательным у любой точки окружности, её момент будет равен 0:

(слева): $\cancel{\frac{135°}{360°}\cdot 2\pi R}$ + Найдём длину висящей части каната: (с каждой стороны)

$$l_{вис}=\frac{l-\pi R}{2};$$

Тогда $l_1=\left(\frac{135°}{360°}\cdot 2\pi R+\frac{l-\pi R}{2}\right)$, $l_2=\left(\frac{45°}{360°}\cdot 2\pi R+\frac{l-\pi R}{2}\right)$;

$$\cancel{mg\cdot\frac{l_1}{l}}\cdot\left(m\cdot\frac{l_1}{l}\right)g-\left(m\cdot\frac{l_2}{l}\right)g-T_A=0$$ (т.к. канат покоится, $\Rightarrow a=0$, $\Rightarrow ma=0$)

$$\Rightarrow T_A=mg\left(\frac{l_1-l_2}{l}\right)=mg\left(\frac{\frac{135}{360}\cdot 2\pi R+\cancel{\frac{l-\pi R}{2}}-\frac{45}{360}\cdot 2\pi R-\cancel{\frac{l-\pi R}{2}}}{l}\right)=$$

$$=\frac{mg}{l}\cdot\frac{\pi R}{2}=\frac{\cancel{2}\,кг\cdot 10\frac{Н}{кг}\cdot\pi\cdot 0,08}{1,5\cdot\cancel{2}}$$, если брать $\pi\approx 3$, то $T_A\approx 1,6$ (Н).

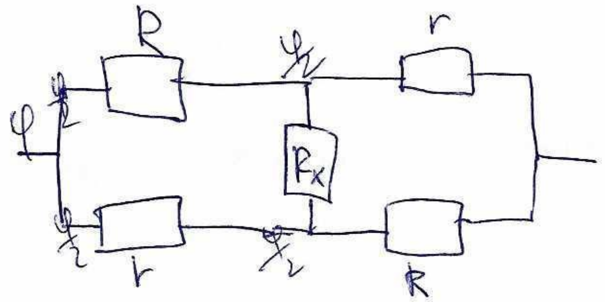
(т.к. калькуляторов нет, точный ответ дать нельзя)

Ответ: $\approx 1,6$ (Н).

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

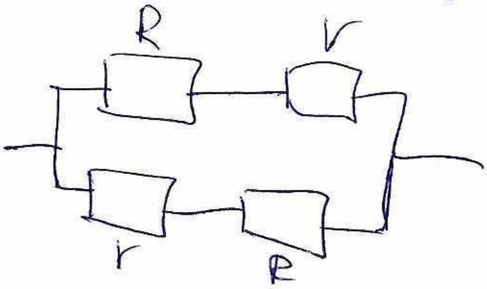
Шифр 02-10-47

№8



Т.к. схема симметрична, то пусть ток идет слева направо.

Заметим, что на схеме изображён мостик — т.е. через центральный резистор R_x ток не пойдет, т.к. на концах одинаковые потенциалы. Тогда преобразуем цепь в:



последовательное соединение

$R_y = \frac{(R+r)\cdot(R+r)}{(R+r)+(R+r)}$ параллельное соединение $=$

$= \frac{R+r}{2} = \frac{4{,}5\,Ом + 2\,Ом}{2} = 3{,}25\,(Ом) = R_x$ по условию.

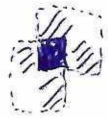
Ответ: 3,25 Ом.

№4

~~Покрасим прямоугольник 25x27 в шахматную раскраску. Тогда количество белых клеток равно $\frac{25\cdot 27-1}{2}=$~~

Заметим, что в прямоугольнике 25x27 в каждую строку поместится максимум $\left[\frac{25}{2}\right]=12$ квадратов без пересечений, а в столбец — $\left[\frac{27}{2}\right]=13$ квадратов без пересечений, т.е. максимальное количество квадратов 2x2 без пересечений — $12\cdot 13=156$.

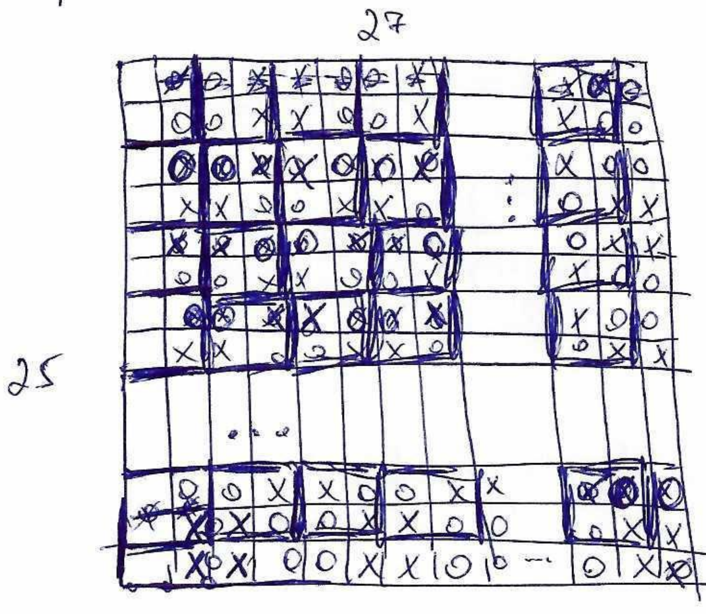
Теперь рассмотрим вариант с накладыванием квадратов. Заметим, что мы не сможем в строку длины 25 „засунуть" больше 12 дополнительных квадратов, и в столбец аналогично не сможем засунуть больше 13. Чтобы это доказать, достаточно показать, что 3 квадрата не могут пересекаться в одной клеточке. Пусть такое произошло. Тогда третий квадрат вынужден использовать



хотя бы ещё одну из заштрихованных точек, но тогда с каким-то из квадратов он будет иметь 2 общие точки. Противоречие.

Тогда, общее количество квадратов не более $12 \cdot 13 + 12 \cdot 13 = 312$.

Пример на 312:



Где жирные штрихи — один квадрат, а крестики и нолики — накладывающиеся. Итого квадратов $12 \cdot 13 + 12 \cdot 13 = 312$, ч.т.д.

Ответ: 312