



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр ТГО-09-9

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	9	12	4	7	10	15	6	75

1.11.11

Вариант 2

1.11.11

$$\begin{cases} x^2 + 2 = (y + z)^2 & (1) \\ y^2 + 1 = (x + z)^2 & (2) \\ z^2 + 1 = (x + y)^2 & (3) \end{cases}$$

Сложим все 3 уравнения системы

$$x^2 + 2 + y^2 + 1 + z^2 + 1 = (y + z)^2 + (x + z)^2 + (x + y)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4 = y^2 + 2yz + z^2 + x^2 + 2xz + z^2 + x^2 + 2xy + y^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 2yz + 2xy = 4$$

$$(x + y + z)^2 = 4; \text{ т.к. } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases} \text{ — по условию}$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{Тогда} \\ &x + y + z = 4 \\ &y + z = 4 - x \text{ (подставим в уравнение (1))} \\ &x^2 + 2 = (4 - x)^2 \\ &x^2 + 2 = 16 \end{aligned} \right\}$$

Тогда

$$x + y + z = 2$$

$$x + y + z = 2$$

$$y + z = 2 - x \text{ (подставим в (1) урав.)}$$

$$x + z = 2 - y \text{ (подставим в (2) урав.)}$$

$$x^2 + 2 = (2 - x)^2$$

$$y^2 + 1 = (2 - y)^2$$

$$x^2 + 2 = 4 - 4x + x^2$$

$$y^2 + 1 = 4 - 4y + y^2$$

$$x^2 + 2 - 4 + 4x - x^2$$

$$y^2 + 1 - 4 + 4y - y^2$$

$$-2 + 4x; \quad x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$-3 + 4y; \quad y = \frac{3}{4}$$

подставим найденные значения в уравнение (3)

$$z^2 + 1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)^2$$

$$z^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)^2 - 1$$

$$z^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)^2 - 1$$

$$z^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1$$

$$z^2 = \frac{25}{16} - 1$$

$$z^2 = \frac{25}{16} - \frac{16}{16}$$

$$z^2 = \frac{9}{16}$$

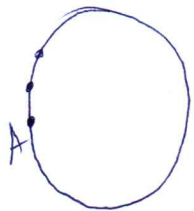
$$z = \frac{3}{4}; \text{ т.к. } z > 0, \text{ получим}$$

$$\text{Ответ: } \underline{x = \frac{1}{2}} \quad \underline{y = \frac{3}{4}} \quad \underline{z = \frac{3}{4}}$$

Проверка: $x + y + z = 2$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ верные решения системы.



Всего на окружности 2025 точек

1) Многоугольники содержащие точку A.

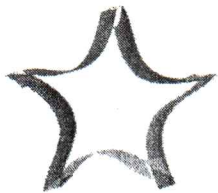
Возьмем их от 2 до 2024 из оставшихся 2024 точек, то есть $C_{2024}^2 + C_{2024}^3 + \dots + C_{2024}^{2023} + C_{2024}^{2024}$

2) Многоугольники не содержащие ее

Возьмем их от 3 до 2024 из оставшихся 2024 точек, то есть $C_{2024}^3 + C_{2024}^4 + \dots + C_{2024}^{2023} + C_{2024}^{2024}$

мы видим что многоугольников содержащих точку A больше на $C_{2024}^2 = \frac{2024!}{2! \cdot 2022!} = 2047273^6$

Ответ: многоугольников содержащих точку A на 2047273⁶ больше на второй шесте



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр ТГ0-09-9

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

2 мин

По условию задачи, составим таблицу с данными, необходимыми для решения.

Время работы	I кассир	II кассир
до обеда	$0,75x$ $\xleftarrow[25\% \text{ меньше}]{\text{на}}$	x
после обеда	$1,2y$ $\xleftarrow[20\% \text{ больше}]{\text{на}}$	y
всего	$0,75x + 1,2y$	$x + y$

т.к. первый кассир обслужил на 10% больше чем ~~второй~~ второй, составим систему уравнений.

$$\begin{cases} 1,1(x+y) = 0,75x + 1,2y & (\text{I кассир обслужил на 10\% больше второго}) \\ (0,75x + 1,2y) + (x+y) < 250 & (\text{общее кол-во обслуженных двумя кассирами} < 250) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1,1x + 1,1y = 0,75x + 1,2y \\ 1,75x + 2,2y < 250 \end{cases} \begin{cases} 0,35x = 0,1y \\ 1,75x + 2,2y < 250 \end{cases} \begin{cases} y = 3,5x \\ 1,75x + 3,5x \cdot 2,2 < 250 (*) \end{cases}$$

$$0,75x < 250$$

$$y = \frac{7}{2}x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \text{ делится на } 2$$

$$0,75x = \frac{3}{4}x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \text{ делится на } 4$$

$$1,2y = \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{2}x = \frac{21}{5}x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \text{ делится на } 5$$

Тригоном

$$0,45x < 250$$

$$x < 26 \frac{930}{0,45}$$

$x \in \mathbb{N}$; x делится на 4 ($\Rightarrow$ на 2) и на 5

$$x = 20$$

$$y = \frac{7}{2} \cdot 20^{10} = 70$$

$$0,75x + 1,2y = \frac{3}{4} \cdot 20^3 + \frac{6}{5} \cdot 70 = 15 + 72 = 87$$

Ответ: 5 классик обдумали 87 покупок
и 4

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ — имеет 3 корня

$g(x) = x^2 + 4x + 2024$ — не имеет корней

Докажем $f(2024) > 64$

$(f \circ g)(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ — имеет 3 корня и это разложение.

$$f(\underline{g(x)}) = (g(x) - x_1)(g(x) - x_2)(g(x) - x_3)$$

$$x^2 + 4x + 2024 - x_i \neq 0$$

$$g(x) \neq x_1$$

$$g(x) \neq x_2$$

$$g(x) \neq x_3$$

$$x_i = 1, 2, 3$$

$$f(2024) = (2024 - x_1)(2024 - x_2)(2024 - x_3) \geq \underline{4 \cdot 4 \cdot 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(2024) > 64.$$

Не показано строго?

предположение на 3 числа



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

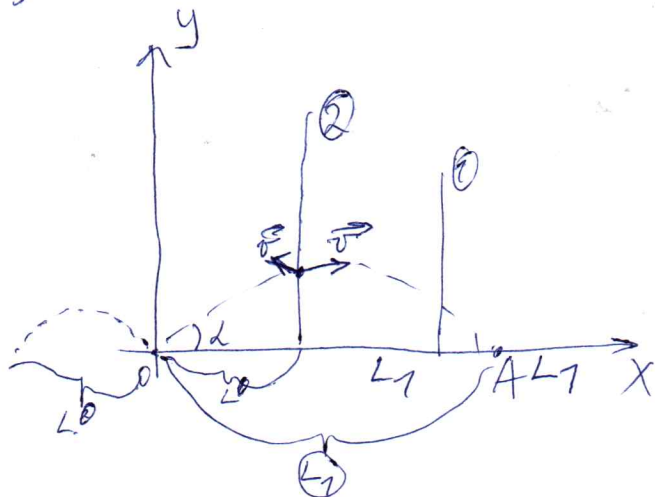
шифр ТТ0-09-9

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

МММ 3

Вариант 2

15



Напишем уравнения
движения:

$$x(t) = v_x t = v_0 \cos \alpha t$$

$$v_x(t) = v_x = v_0 \cos \alpha$$

$$y(t) = v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2} = v_0 \sin \alpha t - \frac{g t^2}{2}$$

$$v_y(t) = v_{0y} + a_y t = v_0 \sin \alpha - g t$$

~~Найдем время полета~~ Найдем время полета t_A

$$y(t) = 0 \Rightarrow v_0 \sin \alpha t - \frac{g t^2}{2} = 0 \Rightarrow t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$v_y(t) = -\sqrt{v^2 - v_x^2} = -\sqrt{v^2 - v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$v_0 \sin \alpha - g t_1 = -\sqrt{v^2 - v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v^2 - v_0^2 \cos^2 \alpha}}{g}$$

$$t_{110} = \frac{(v_0 \sin \alpha + \sqrt{v^2 - v_0^2 \cos^2 \alpha}) v_0 \cos \alpha}{g}$$

$$L = 2 \cdot t_{(1x)} - 0A$$

$$L = \frac{2 \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} + \sqrt{v^2 + v_0^2 \cos^2 \alpha}}{g} - \frac{2 v_0 \cdot \sin \alpha}{g} = \frac{2 \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} + \sqrt{v^2 + v_0^2 \cos^2 \alpha}}{g} - \frac{2 v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

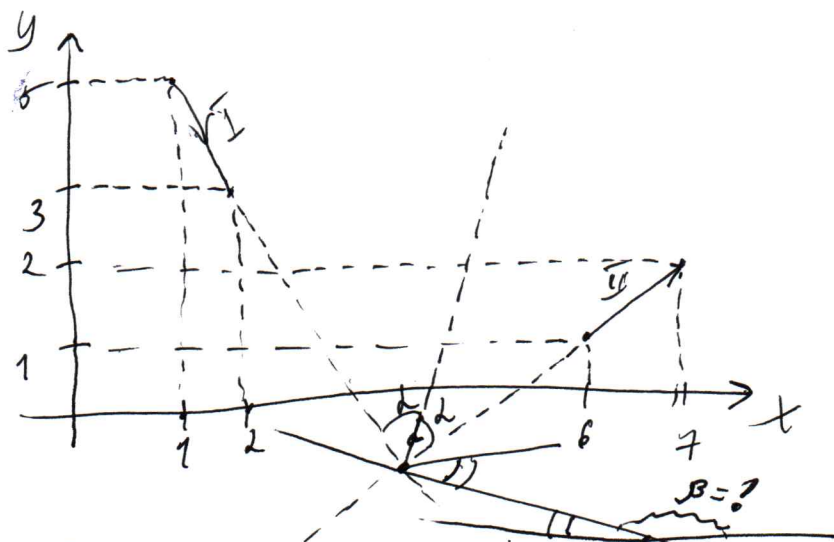
расстояние будет "зеркально отражено", отталкиваясь от точки, куда удар является абсолютно упругим, то есть расстояние будет одинаковым, разным будет только направление

$$L = \frac{2 \cdot 30 \text{ м/с} \cdot \cos 60^\circ + \sqrt{20^2 \text{ м/с}^2 + 30^2 \text{ м/с}^2 \cdot \cos^2 60^\circ}}{10 \text{ м/с}^2} = 60 \cdot \cos 60^\circ + \sqrt{400 \text{ м/с}^2 + 225} =$$

$$= 60 \cos 60^\circ + \sqrt{175} \approx 39,4 \text{ м}$$

Ответ: 39,4 м.

В/8



Продолжим оба луча до т. пересечения, которая и является точкой отражения.

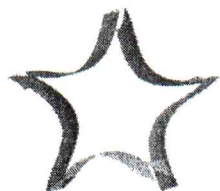
луч I: запишем уравнение прямой

$$y = kx + b \Rightarrow \begin{cases} 5 = k + b \\ 3 = 2k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k = -2 \\ b = 7 \end{matrix} \mid \text{урав. прямой I: } y = -2x + 7$$

луч II: запишем уравнение прямой

$$y = kx + b \Rightarrow \begin{cases} 1 = 6k + b \\ 2 = 7k + b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k = 1 \\ b = -5 \end{matrix} \mid \text{урав. прямой II: } y = x - 5$$

продолжение на ч месте



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр ТГО-09-9

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

мет 4

Вариант 1

28
Из данных уравнений можно составить систему

$$\begin{cases} y = -2x + 7 \\ y = x - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 5 = -2x + 7 \\ y = x - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

точка отражения А имеет координаты $A(4; -1)$

угол падения I луча $= 180^\circ - \arctg 2$

угол падения II луча $= \arctg 1 = 45^\circ$

угол между ними $\varphi = 180^\circ - \arctg 2 - 45^\circ = 135^\circ - \arctg 2$

угол падения = углу отражения $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\alpha = 135^\circ - \arctg 2 \Rightarrow \alpha = \frac{135 - \arctg 2}{2}$$

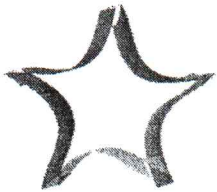
$90 - \alpha$ (угол между пад. и отраж.

$$90 - \alpha = 90 - \frac{135 - \arctg 2}{2} = \frac{45 - \arctg 2}{2}$$

$$\beta = \frac{405 - \arctg 2}{2} \approx 171^\circ$$

Ответ: $\beta \approx 171^\circ$

Продолжение на 5 листе



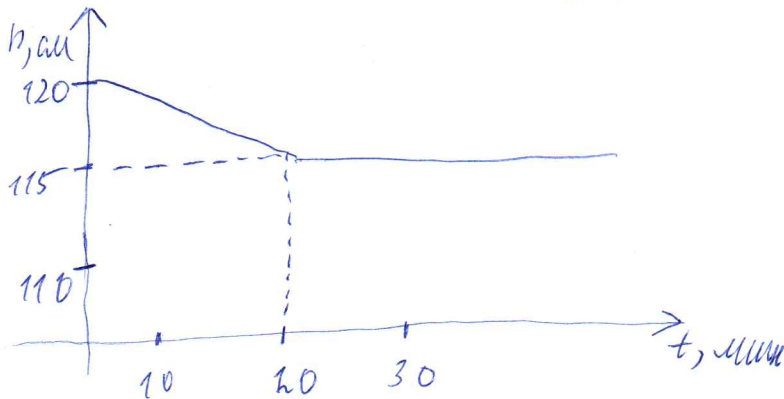
Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр ТГО-09-9

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

мин 5

Вариант 2



Мы видим что по времени в промежутке 0-20 минут, мед таял и переходил в жидкое состояние, в 20 минут в стакане уже была только вода

① Рассмотрим первый промежуток времени 0-20 минут

$$V_1 = V_B + V_A$$

$$V_1 = \rho h_1 (h_1 = 120 \text{ атм})$$

$$V_B = \frac{m_B}{\rho_B} \quad V_A = \frac{m_A}{\rho_A}$$

$$\rho h_1 = \frac{m_B}{\rho_B} + \frac{m_A}{\rho_A}$$

② Рассмотрим второй промежуток времени 20 и более минут.

$$V_2 = V_B$$

$$V_2 = \rho h_2 (h_2 = 115 \text{ атм})$$

$$V_B = \frac{m_B + m_A}{\rho_B}; \quad \rho h_2 = \frac{m_B + m_A}{\rho_B}$$

составим систему уравнений

~~переходим к формуле~~

$$\begin{cases} Sh_1 p_b \cdot p_A = p_b m_n + p_A m_b \\ Sh_2 p_b = m_n + m_b \end{cases} \begin{vmatrix} - \\ \cdot p_b \end{vmatrix} \begin{vmatrix} - \\ \cdot p_A \end{vmatrix}$$

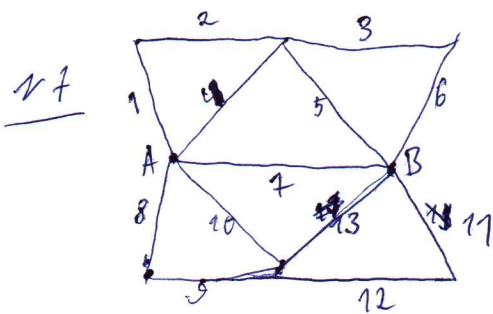
$$Sh_1 p_b \cdot p_A - Sh_2 p_b^2 = p_A m_b - p_b \cdot m_n$$

$$Sh_1 p_b p_A - Sh_2 p_b p_A = p_b m_b - p_A m_n$$

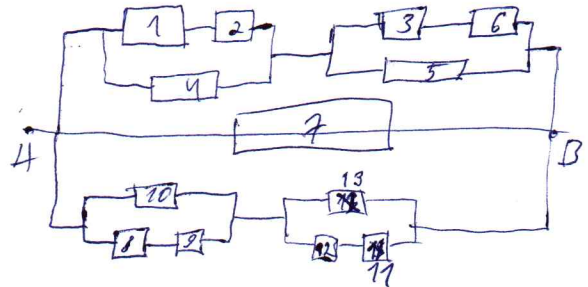
$$m_b = \frac{Sh_2 p_b - h_1 p_A}{p_b - p_A} = 10502 = \frac{15 \text{ см}^2 \cdot 12 / \text{см}^3 (115 \text{ см} \cdot 12 / \text{см}^3 - 120 \cdot 0,94 / \text{см}^3)}{12 / \text{см}^3 - 0,94 / \text{см}^3}$$

$$m_n = \frac{Sh_1 h_2 - h_1 h_2}{p_b \cdot p_A} = 6752 = \frac{15 \text{ см}^2 \cdot 12 / \text{см}^3 \cdot 0,94 / \text{см}^3 (120 \text{ см} - 115 \text{ см})}{12 / \text{см}^3 - 0,94 / \text{см}^3}$$

Ответ: $m_b = 10502$ $m_n = 6752$



эквивалентная
электрическая
схема



$$R_{12} = R_{36} = R_{89} = R_{112} = 2R_0 \text{ (последовательное соединение.)}$$

$$R_{124} = R_{365} = R_{8910} = R_{121113} = \frac{2R_0 \cdot R_0}{2R_0 + R_0} = \frac{R_{12} \cdot R_4}{R_{12} + R_4} = \frac{2}{3} R_0 \text{ (параллельное соединение)}$$

$$R_{1-6} = R_{8-11} = \frac{4}{3} R_0 \text{ (последовательное соединение)}$$

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_{1-6}} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_{8-11}} \text{ (параллельное соединение)}$$

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{3}{4R_0} + \frac{1}{R_0} + \frac{3}{4R_0} = \frac{3+4+3}{4R_0} = \frac{10}{4R_0} = \frac{5}{2} R_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{AB}} = \frac{5}{2} R_0 \Rightarrow R_{AB} = \frac{2}{5} R_0 = \frac{2}{5} \cdot 80 \text{ Ом} = \frac{2 \cdot 80}{5} = \frac{160}{5} = \frac{32}{10} = 3,2 \text{ Ом}$$

Ответ: $R_{AB} = 3,2 \text{ Ом}$