



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 52-11-14

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	12	13	—	15	0	0	10	60

Вариант 2

$$\begin{cases} \frac{\log_{25} x \cdot \log_5 y}{\log_{25}(xy)} = 1 & (1) \\ \frac{\log_5 y \cdot \log_7 z}{\log_7(yz)} = \frac{3}{5} & (2) \\ \frac{\log_{125} z \cdot \log_3 x}{\log_{31}(zx)} = 1 & (3) \end{cases}$$

ОДЗ: $x > 0, y > 0, z > 0$
Заметим также, что $x \neq 1, y \neq 1, z \neq 1$, иначе при подстановке в левую часть уравнений системы получится 0, а справа число не равное 0.

$$(1). \frac{\log_{25} x \cdot \log_3 y}{\log_{25}(xy)} = 1, \quad \frac{\frac{1}{2} \log_5 x \cdot \log_3 y}{\frac{1}{3} \log_3(xy)} = 1, \quad \frac{\log_5 x \cdot \log_3 y}{\log_3 x + \log_3 y} = \frac{2}{3},$$

$$\frac{(\log_3 x) \cdot \log_3 y}{\log_5 x \cdot \log_3 y} + \frac{\log_3 y \cdot 1}{(\log_5 x \cdot \log_3 y)} = \frac{3}{2}, \quad \frac{\log_3 x}{\log_5 x} + \log_x 5 = \frac{3}{2},$$

$$\boxed{\log_y 5 + \log_x 5 = \frac{3}{2}}$$

Аналогичные действия проводим со строками (2) и (3).

$$(2). \frac{\frac{1}{2} \log_5 y \cdot \log_7 z}{\log_7 y + \log_7 z} = \frac{3}{5}, \quad \frac{\log_7 y + \log_7 z}{\log_5 y \cdot \log_7 z} = \frac{5}{6}, \quad \frac{\log_7 y}{\log_5 y} + \frac{1}{\log_5 y} = \frac{5}{6},$$

$$\boxed{\log_2 5 + \log_3 5 = \frac{5}{6}}$$

$$(3). \frac{\frac{1}{3} \log_5 z \cdot \log_3 x}{\frac{1}{4} \log_3(zx)} = 1, \quad \frac{\log_3 z + \log_3 x}{\log_5 z \cdot \log_3 x} = \frac{4}{3}, \quad \frac{\log_3 z}{\log_5 z} + \frac{1}{\log_5 z} = \frac{4}{3},$$

$$\boxed{\log_x 5 + \log_2 5 = \frac{4}{3}}$$

Вернемся к системе:

$$\begin{cases} \log_x 5 + \log_3 5 = \frac{3}{2} \\ \log_3 5 + \log_2 5 = \frac{5}{6} \\ \log_2 5 + \log_x 5 = \frac{4}{3} \end{cases} \quad 1/4$$

Поскольку $p = \log_x 5$, $q = \log_y 5$, $r = \log_z 5$. Тогда:

$$\begin{cases} p+q = \frac{3}{2} \\ q+r = \frac{5}{6} \\ r+p = \frac{1}{3} \end{cases}, \begin{cases} p+q = \frac{3}{2} \\ q = \frac{5}{6} - r \\ r = \frac{1}{3} - p \end{cases}, \begin{cases} q = \frac{5}{6} - (\frac{1}{3} - p) = p - \frac{1}{2} \\ p + p - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ 2p = 2 \\ p = 1 \end{cases}$$

Произведем обратную замену:

$$\begin{cases} \log_x 5 = 1 \\ \log_y 5 = \frac{1}{2} \\ \log_z 5 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$q = p - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{3} - p = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} \log_5 x = 1 \\ \log_5 y = 2 \\ \log_5 z = 3 \end{cases}$$

Отсюда: $x = 5$, $y = 25$, $z = 125$.

Ответ удовлетворяет ОДЗ.

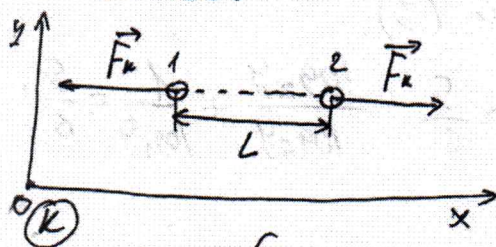
Ответ: $x = 5$, $y = 25$, $z = 125$.

№6.

Дано: L, q_1, q_2, m_1, m_2

Найти: U_1, U_2 .

Решение:



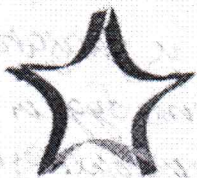
На оба заряда действует сила Кулона, равная по величине: $F_k = k \frac{q_1 \cdot q_2}{L^2}$

k - лабораторная с.о. П.к. в обе стороны действуют равные по величине силы, но

центр масс системы перемещается. Предлагаем, что

Найдем его расстояние x_1 и x_2 от точек 1 и 2:

$$x_1 = L \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad x_2 = L \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 52-11-17

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Найдём зависимость F_k от x_1 и x_2 для зарядов 1 и 2:

$$F_{k1}(x_1) = k \frac{q_1 \cdot q_2}{\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} x_1\right)^2}, \quad F_{k2}(x_2) = k \frac{q_1 \cdot q_2}{\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} x_2\right)^2}$$

Найдём работу по перемещению зарядов 1 и 2:

$$A_1 = \int_{x_{10}}^{+\infty} k \frac{q_1 \cdot q_2}{\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} x_1\right)^2} dx_1 = \frac{k m_2^2 q_1 q_2}{(m_1 + m_2)^2} \int_{x_{10}}^{+\infty} \frac{1}{x_1^2} dx_1 = \frac{-k m_2^2 q_1 q_2}{(m_1 + m_2)^2 x_1} \Bigg|_{x_{10}}^{+\infty} =$$
$$= \frac{k m_2^2 q_1 q_2}{(m_1 + m_2)^2 x_{10}}.$$

Для A_2 аналогично, только m_2^2 в числителе
сменим m_1^2 , а $x_{10} \rightarrow x_{20}$.

$$A_2 = \frac{k m_1^2 q_1 q_2}{(m_1 + m_2)^2 x_{20}}.$$

$$x_{10} \text{ и } x_{20} \text{ равны: } x_{10} = L \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad x_{20} = L \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

$$\text{Тогда: } A_1 = \frac{k m_2 q_1 q_2}{(m_1 + m_2) L}, \quad A_2 = \frac{k m_1 q_1 q_2}{(m_1 + m_2) L}$$

По т. обизм. кин. энергии для 1 и 2 зарядов:

$$A_1 = \Delta E_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2}$$

$$A_2 = \Delta E_{k2} = \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

$$\frac{k m_2 q_1 q_2}{(m_1 + m_2) L} = \frac{m_1 v_1^2}{2}$$

$$\frac{k m_1 q_1 q_2}{(m_1 + m_2) L} = \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

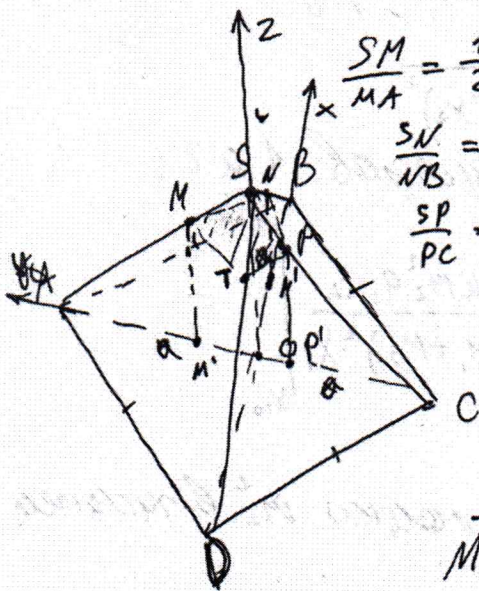
$$\text{Отсюда: } v_1 = \sqrt{\frac{2 k m_2 q_1 q_2}{m_1 (m_1 + m_2) L}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2 k m_1 q_1 q_2}{m_2 (m_1 + m_2) L}}$$

$$\text{Ответ: } v_1 = \sqrt{\frac{2 k m_2 q_1 q_2}{m_1 (m_1 + m_2) L}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2 k m_1 q_1 q_2}{m_2 (m_1 + m_2) L}}.$$

№1.

Итого доказано.

Поскольку в условии не даны длины сторон и указания на вид пирамиды, сделаем вывод, что ответ будет одинаковым при любых параметрах, удовлетворяющих условию. В таком случае, пусть в основании квадрат с диагональю $2a$, а высота пирамиды - a , а также пирамида правильная. Введём П.С.К как показано на рисунке. Проецируем M, N, P на диагонали в точки M', N', P' .



$$\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{SN}{NB} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{SP}{PC} = \frac{1}{4}$$

По т. Фалеса, $AM':M'O = AM:MS$,
 $BN':N'O = BN:NS$, $CP':P'O = CP:PS$.

Тогда, координаты точек M, N, P :

$$M(0, \frac{a}{3}, \frac{2a}{3}), N(\frac{a}{4}, 0, \frac{3a}{4}), P(0, -\frac{a}{5}, \frac{4a}{5})$$

$$\vec{MN} \left\{ \frac{a}{4}, -\frac{a}{3}, \frac{a}{12} \right\} \quad \vec{MP} \left\{ 0, -\frac{8a}{15}, \frac{2a}{15} \right\}$$

Нормаль $\vec{n}$ к плоскости (MNP):

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{a}{4} & -\frac{a}{3} & \frac{a}{12} \\ 0 & -\frac{8a}{15} & \frac{2a}{15} \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -\frac{a}{3} & \frac{a}{12} \\ -\frac{8a}{15} & \frac{2a}{15} \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{a}{4} & \frac{a}{12} \\ 0 & \frac{2a}{15} \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{a}{4} & -\frac{a}{3} \\ 0 & -\frac{8a}{15} \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \left(-\frac{2a^2}{45} + \frac{8a^2}{15 \cdot 12} \right) - \vec{j} \left(\frac{2a^2}{60} \right) + \vec{k} \left(-\frac{8a^2}{100} \right) =$$

$$= \cancel{\vec{i} \left(-\frac{2a^2}{45} + \frac{8a^2}{180} \right)} - \frac{a^2}{30} \vec{j} - \frac{2a^2}{25} \vec{k}$$

$$\vec{n}_1 = \vec{n} \cdot \frac{5}{a^2} \text{ - такая нормаль: } \vec{n}_1 = \cancel{\vec{i} \left(-\frac{2a^2}{45} + \frac{8a^2}{180} \right)} - \frac{1}{6} \vec{j} - \frac{2}{5} \vec{k}$$

$$\text{Ур-ние плоскости (MNP): } \cancel{\vec{i} \left(-\frac{2a^2}{45} + \frac{8a^2}{180} \right)} - \frac{1}{6} y - \frac{2}{5} z + D = 0$$

Как видно, ур-ние плоскости не зависит от x , значит $(MNP) \parallel OX$, $(MNP) \parallel DB$.

Значит, по свойству параллельности, $(MNP) \cap (OSB) \parallel OB$,
 значит $TK \parallel DB$.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 52-11-17

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Тогда, по т. Фалеса, $\frac{NB}{NS} = \frac{DT}{TS} = 3$.

Значит, точка T делит SD в отношении: $\frac{ST}{TD} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $ST:TD = 1:3$.

№3.

$$4^x + \sin^4 y + \ln^6 z = 25$$

$$(2^x)^2 + (\sin^2 y)^2 + (\ln^3 z)^2 = 25$$

Заметим, что слева сумма квадратов, а значит неотрицательных чисел.

Тогда: $(2^x)^2 \leq 25$, $(\ln^3 z)^2 \leq 25$ - очевидно, каждая сумма будет больше 25.

$$0 < 2^x \leq 5 \quad (1)$$

$$-5 \leq \ln^3 z \leq 5$$

$$-40 \leq 8\ln^3 z \leq 40 \quad (2)$$

По свойству $\sin$, $-1 \leq \sin y \leq 1$. Тогда, $0 \leq \sin^2 y \leq 1$.

$$-4 \leq 4\sin^2 y \leq 0 \quad (3)$$

Сложив (1), (2) и (3), получим:

$$0 - 40 - 4 \leq 2^x - 4\sin^2 y + 8\ln^3 z \leq 40 + 5$$

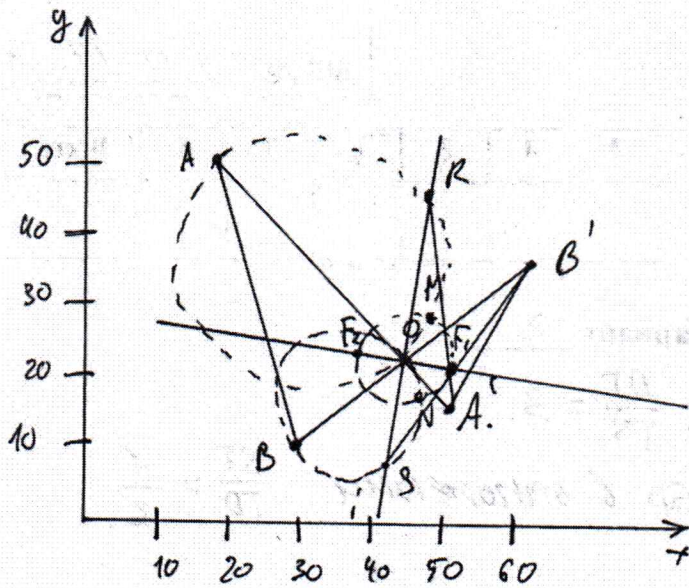
$$-44 \leq 2^x - 4\sin^2 y + 8\ln^3 z \leq 45$$

$$\text{Отсюда: } 2^x - 4\sin^2 y + 8\ln^3 z \leq 45$$

т.м.г.

3/4

№8.



Как известно, изображение точки лежит на пересечении прямой, проведенной из точки в оптический центр, и прямой, проведенной из точки пересечения перпендикуляра к линзе с линзой в фокус. Значит, точка

O пересечения AA' и BB' - оптический центр. +4

Найдём точку пересечения куда падает перпендикуляр из A на линзу P, а из B - Q. Значит, углы

$\angle APO$ и $\angle BQO$ прямые. Также, P, Q, O лежат на одной прямой. Построим окружность на AO как

на диаметр. (Построим окружность, определив центр отрезка AO: поставим циркуль в точку A, поставим ножку в точку O, проведём окружность, проведём диаметр начав же радиуса с центром в A, проведём прямую через точки пересечения этих окружностей, точка пересечения этой прямой с AO - центр AO. Далее, поставим ножку циркуля в A и проведём окружность с центром в центре отрезка AO.) Аналогично, построим окружность на BO как на диаметре. Проведём прямую через O, пересекать

две окружности в двух разных точках, отложим от O. Тогда, $\angle BSO = 90^\circ$, т.к. BO - диаметр, а S лежит на дуге, а также $\angle ARO = 90^\circ$, аналогично. Тогда RS - перпендикуляр к линзе.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 52-11-17

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2.

Проведём через окружность ω точки O , обозначим
точки пересечения с окружностью как M и N (см. рис.)
Проведём прямую через O параллельно MN . Тогда,
и обозначим точки пересечения за R и S .
Тогда, $\angle ARO = \angle BSO = 90^\circ$, т.к. AO и BO — диаметры,
а R и S лежат на окружности. Значит, RS — хорда
ленты. Тогда, точка перес. SB' и RA' — фокус, другой
фокус находится из симметрии относительно RS , а действит.
оптическая ось — проведём прямой через два фокуса.