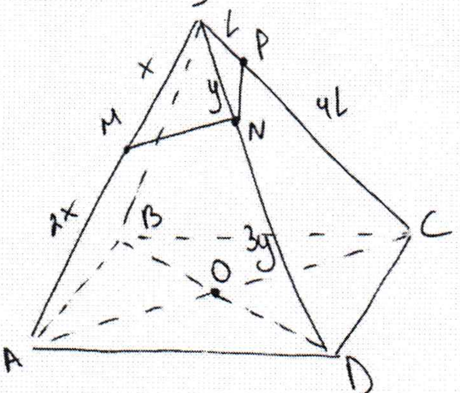
Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

шифр 23-11-05

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	12	5	13	15	10	10	0	77

Вариант 1

№1



Дано:

ABCD - параллелограмм

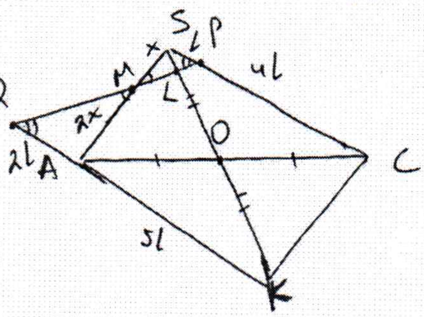
$M \in SA$; $N \in SD$; $P \in SC$

$SM:MA = 1:2$; $SN:ND = 1:3$; $SP:PC = 1:4$

В каком отношении (MNP) делит ребро SB?

Решение:

Построим сечение (ASC)



ASCK - параллелограмм т.к. диагонали точкой пересечения делятся пополам.

$\triangle SPM \sim \triangle AQM$ по 2-ум углам $\Rightarrow$

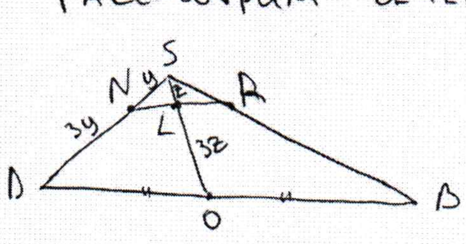
$$\Rightarrow \frac{SP}{AQ} = \frac{SM}{AM} = \frac{SP}{AQ} = \frac{1}{2} \Rightarrow AQ = 2l$$

Рассмотрим т. Менелая для $\triangle ASK$ и секущей ΓQ:

$$\frac{AM}{MS} \cdot \frac{SL}{LK} \cdot \frac{KQ}{QA} = 1; \quad \frac{2x}{x} \cdot \frac{SL}{LK} \cdot \frac{7l}{2l} = 1; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{SL}{LK} = \frac{1}{7} \Rightarrow \begin{matrix} SL = z \\ LK = 7z \end{matrix} \quad \begin{matrix} SK = 8z \\ SO = 4z \end{matrix}$$

Рассмотрим сечение BSD



$$\frac{SL}{LO} = \frac{1}{3} \text{ и } \frac{SN}{ND} = \frac{1}{3} \Rightarrow \triangle SNL \sim \triangle SDO \Rightarrow$$

$\Rightarrow NL \parallel DO \Rightarrow NR \parallel BD \Rightarrow$ по т. Фалеса:

$SR:RB = 1:3$

Ответ: MNP делит ребро SB в отношении 1:3

№2

$$\begin{cases} \dfrac{\log_3 x \cdot \log_4 y}{\log_2 (xy)} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{\log_3 y \cdot \log_{25} z}{\log_5 (yz)} = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{\log_{27} z \cdot \log_2 x}{\log_{16} (zx)} = 1 \end{cases}$$

ОДЗ:

$x \neq 1$
$x > 0$
$y \neq 1$
$y > 0$
$z \neq 1$
$z > 0$

применяя св-ва логарифмов:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \log_3 x = (\log_y (xy)) \cdot \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \log_3 y = \frac{3}{5} \log_z (yz) \\ \frac{4}{3} \log_3 z = \log_x (zx) \end{cases}$$

Пусть $a = \log_3 x$; $b = \log_3 y$; $c = \log_3 z$, тогда

$x = 3^a$; $y = 3^b$; $z = 3^c$

$$\begin{cases} a = \frac{2}{3}\log_{3^b} 3^{a+b} \\ b = \frac{6}{5}\cdot\log_{3^c} 3^{b+c} \\ c = \frac{3}{4}\cdot\log_{3^a} 3^{a+c} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{2(a+b)}{3b} \ \Big|:a \\ b = \frac{6(b+c)}{5c} \ \Big|:b \\ c = \frac{3\cdot(a+c)}{4a} \ \Big|:c \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right) \\ 1 = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right) \\ 1 = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{b}+\frac{1}{a} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{c}+\frac{1}{b} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{c}+\frac{1}{a} = \frac{4}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{3}{2} - \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} = \frac{5}{6} - \frac{1}{b} \\ \frac{5}{6} - \frac{1}{b} + \frac{3}{2} - \frac{1}{b} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\frac{2}{b} = \frac{5}{6} + \frac{3}{2}^{\backslash 3} - \frac{4}{3}^{\backslash 2}$$

$$\frac{2}{b} = \frac{5+9-8}{6}$$

$$\frac{2}{b} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ \frac{1}{c} = \frac{5}{6} - \frac{1}{2}^{\backslash 3} \\ \frac{1}{a} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ \frac{1}{c} = \frac{2}{6} \\ \frac{1}{a} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 9 \\ z = 27 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ответ: $x = 3$; $y = 9$; $z = 27$

12

№3

Дано:

$4^x + \sin^4 y + \ln^6 z = 16$

Д-ть:

$2^{x+1} + 3\sin^2 y - 6\ln^3 z \le 28$

Решение:

Из условия:

$\ln^6 z = 16 - 4^x - \sin^4 y$

Оценим, учитывая, что $0 \le \sin^4 y \le 1$

$16 - 1 - 4^x \le \ln^6 z \le 16 - 4^x$

по условию надо оценить:

$B = 2^{x+1} + 3\sin^2 y - 6\ln^3 z$

$B \le 2\cdot 2^x + 3\cdot 1 + 6\cdot\sqrt{15-4^x}$ Пусть $2^x = t$, тогда

Рассмотрим функцию:

$f = 2t + 3 + 6\cdot\sqrt{15-t^2}$ $\qquad f'(t) = 2 + 6\cdot\frac{-t}{\sqrt{15-t^2}} = 0$

из условия $4^x \le 16$, значит $0 < t \le 4$

область определения функции другая!

$3t = 2\sqrt{15-t^2}$; $9t^2 = 4\cdot 15 - 4t^2$; $t^2 = \frac{4\cdot 15}{13}$; $t = 2\cdot\sqrt{\frac{15}{13}}$

$$\underset{0}{(}\ \ + \ \ \underset{\max}{2\sqrt{\tfrac{15}{13}}}\ \ - \ \ \underset{4}{]} \rightarrow t$$

значит f наибольшее в точке $t = 2\sqrt{\frac{15}{13}}$, тогда

$B \le 2\cdot 2\sqrt{\frac{15}{13}} + 3 + 6\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{15}{13}}$

$B \le 4\sqrt{\frac{15}{13}} + 18\sqrt{\frac{15}{13}} + 3$

$B \le 22\sqrt{\frac{15}{13}} + 3$; $22\sqrt{\frac{15}{13}} + 3 \le 28$

ч.т.д.

5

№4

Дана последоват.:

$a_1 = \cos 10^\circ;\ a_2 = \cos 100^\circ, \ldots, a_n = \cos(10^n)^\circ, \ldots$

Найти наим. знач. выражения:

$a_1 \cdot \cos x + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \cdot \sin x$, где $x \in R$

Рассмотрим члены последовательности

$a_1 = \cos 10^\circ$

$a_2 = \cos(10^2)^\circ = \cos 100^\circ = -\sin 10^\circ$

$a_3 = \cos(10^3)^\circ = \cos 1000^\circ = \cos(1800-800)^\circ = \cos 800^\circ = \cos(720+80)^\circ = \cos 80^\circ$

$a_4 = \cos 10000^\circ = \cos(18000-8000)^\circ = \cos 8000^\circ = \cos(7200+800)^\circ = \cos 800^\circ =$
$= \cos 80^\circ$

$a_n = \cos 80^\circ;\ n \geq 4$ – предположение индукции

Найдём a_{n+1}

$a_{n+1} = \cos(10^{n+1})^\circ = \cos(180 \cdot 10^{n-1} - 80 \cdot 10^{n-1})^\circ = \cos(80 \cdot 10^{n-1})^\circ =$
$= \cos(72 \cdot 10^{n-1} + 8 \cdot 10^{n-1})^\circ = \cos(8 \cdot 10^{n-1})^\circ = a_n = \cos 80^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{2023} = a_{2024} = \cos 80^\circ$

Тогда функцию можно переписать в виде

~~$f(x) = \cos 10^\circ \cdot \cos x$~~ $f(x) = \cos 10^\circ \cdot \cos x + (-\sin 10^\circ + \cos 80^\circ + \cos 80^\circ) \sin x$

$f(x) = A \cos x + B \sin x = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \sin x \right) \cdot \sqrt{A^2 + B^2}$
$= \sin(\varphi + x) \cdot \sqrt{A^2 + B^2}$

Для оценки функции найдём $A^2 + B^2 = \cos^2 10^\circ + (-\sin 10^\circ + 2\cos 80^\circ)^2$
$= \cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ - 4 \sin 10^\circ \cos 80^\circ + 4 \cos^2 80^\circ = 1 + 4 \cos 80^\circ (\cos 80^\circ - \sin 10^\circ) =$
$= 1 + 4 \cos 80^\circ \cdot (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ) = 1 \Rightarrow f(x) = \sin(\varphi + x) \cdot 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_{наим} = -1$

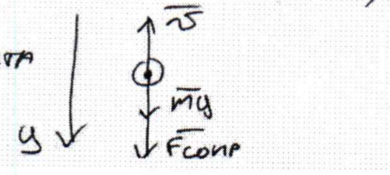
Ответ: -1

№5

Решение:

Так как ускорение шарика не является постоянным, в процессе его движения действует сила сопротивления, пропорциональная скорости: $F_{сопр} = k\upsilon$

Т.к. шарик брошен вверх, то до остановки в верхней точке траектории расстановка сил имеет вид:



По II закону Ньютона для начального момента времени $ma_0 = mg + k\upsilon_0$

Через 2 секунды после начала

движения $a_1 = g = 10\ м/с^2 \Rightarrow v = 0$ – достигнута верхняя точка траектории т.к. $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_{v_0}^{0} dv = -\int_0^2 a \cdot dt$ – скорость убывает. Интеграл можно найти как площадь под графиком ускорения за первые 2 секунды $\Rightarrow v_0 = \frac{1}{2}\cdot(20+10)\cdot 2 = 30\ м/с$ – ускорение изменяется линейно $\Rightarrow$ искалась площадь трапеции.

Ответ: 30 м/с

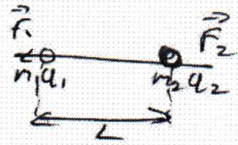
№6

Дано:

$L; q_1; q_2;$
$m_1; m_2$

$v_1; v_2$ – ?

Решение:



По закону сохранения энергии:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{L} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

– считаем, что через большой промежуток времени заряды удалятся на ∞ друг от друга и их потенциальная энергия станет равна 0.

По закону сохранения импульса:

$$0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{m_2}{m_1}\cdot v_2 \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{L} = \frac{\cancel{m_1}\cdot m_2^2\cdot v_2^2}{2\cdot m_1^{\cancel{2}}} + \frac{m_2\cdot v_2^2}{2} = \frac{m_2 v_2^2}{2}\left(\frac{m_2}{m_1}+1\right)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{L}\cdot\frac{1}{m_2\cdot\left(\frac{m_2}{m_1}+1\right)}} = \sqrt{\frac{q_1 q_2}{2\pi\varepsilon_0\cdot L\cdot m_2\cdot\left(\frac{m_2}{m_1}+1\right)}}$$

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1}\cdot\sqrt{\frac{q_1 q_2}{2\pi\varepsilon_0\cdot L\cdot m_2\left(\frac{m_2}{m_1}+1\right)}}$$

Ответ: $v_1 = \frac{m_2}{m_1}\cdot\sqrt{\frac{q_1 q_2}{2\pi\varepsilon_0\cdot L\cdot m_2\cdot\left(\frac{m_2}{m_1}+1\right)}}$; $v_2 = \sqrt{\frac{q_1 q_2}{2\pi\varepsilon_0\cdot L\cdot m_2\cdot\left(\frac{m_2}{m_1}+1\right)}}$

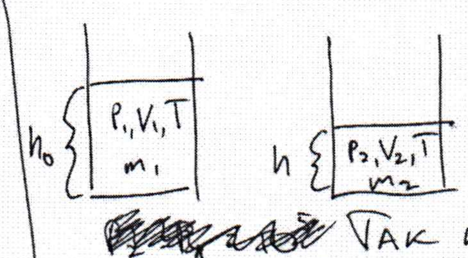
№7

Дано:

$T = 100\ °C$
$P_{нп} = 10^5\ Па$
$h_1 = h_0 = 0{,}3\ м$
$h_2 = h = 0{,}1\ м$
$P_2 = 2P_1$
$S = 100\cdot 10^{-4}\ м^2$

$m_п$ – ?

Решение



Так как давление возрастает непропорционально уменьшению объема, ~~считаем, что~~ часть пара сконденсировалась. Так как $T = 100°C$, давление $P_2 = 10^5\ Па$. В задаче не конкретизируется, что происходит в процессе с температурой, поэтому будем считать её постоянной.

$T = t + 273$

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

Шифр 23-11-05

$P_2 = P_н = 10^5$ Па, при $t = 100°C$

$P_2 V_2 = \frac{m_2}{\mu} RT$; $V_2 = Sh_2$; $V_2 = 100 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1 = 10^{-3}$

$\mu = 18 \cdot 10^{-3} \frac{кг}{моль}$

$$m_2 = \frac{P_н \cdot V_2 \cdot \mu}{RT} = \frac{P_2 \cdot Sh_2 \mu}{RT}$$

$$m_2 = \frac{10^5 \cdot 10^{-3} \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 373} = \frac{18 \cdot 10^{-1}}{8{,}31 \cdot 373} = \frac{18}{83{,}1 \cdot 373} = 0{,}00058 \text{ кг} = 5{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ кг}$$

$$\begin{cases} P_1 V_1 = \frac{m_1}{\mu} RT \\ P_2 V_2 = \frac{m_2}{\mu} RT \end{cases} \qquad \frac{P_1 V_1}{P_2 V_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\frac{P_1 h_1}{P_2 h_2} = \frac{m_1}{m_2}; \quad m_1 = m_2 \cdot \frac{P_1 h_1}{P_2 h_2}$$

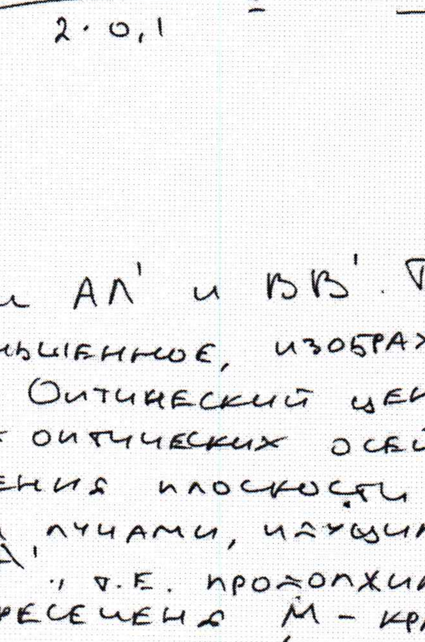
$$m_1 = \frac{m_2 P_1 h_1}{2 P_1 \cdot h_2} = \frac{m_2 h_1}{2 h_2} = \frac{5{,}8 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}3}{2 \cdot 0{,}1} = \frac{0{,}87 \cdot 10^{-4}}{10^{-1}} =$$

$$= 0{,}87 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

Ответ: $0{,}87 \cdot 10^{-3}$ кг

№8

Проведём побочные оптические оси АА' и ВВ'. Так как изображение перевёрнутое и уменьшенное, изображение получено в собирающей линзе. Оптический центр лежит на пересечении побочных оптических осей и его положение (36, 37). Для построения плоскости линзы воспользуемся крайними лучами, идущими из т. А и приходящими в т. А', т.е. продолжим прямые АВ и А'В' и т. их пересечения М – крайняя точка линзы. Плоскость линзы строится вдоль прямой СМ. Перпендикулярно плоскости линзы строится главная оптическая ось ОО'. Параллельно главной оптической оси проведём лучи из точек А и В до пересечения с линзой. После преломления линзой они пересекутся в заднем фокусе $F_з(40, 38)$. Симметрично относительно начала координат строим передний фокус $F_п(30, 36)$



Отв: $F_ц(36; 37)$; $F_з(40; 38)$; $F_п(30; 36)$