

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 55-9-61

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

1 стр.

$$\begin{cases} x^2 + 2 = (y+z)^2 & (1) \\ y^2 + 3 = (x+z)^2 & (2) \\ z^2 + 4 = (x+y)^2 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1) (1) - (2) &= (x-y)(x+y) - 1 = (y+z-x-z)(y+z+x+z) \\ &= (x-y)(x+y) + (x-y)(x+y+2z) = 1 \\ &= (x-y)(2x+2y+2z) = 1 \\ &2(x-y)(x+y+z) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) (4) - (3) &= (y-z)(y+z) - 1 = (x+z-x-y)(x+z+x+y) \\ &= (y-z)(y+z) + (y-z)(x+y+z) = 1 \\ &2(y-z)(x+y+z) = 1 \end{aligned}$$

$$3) 1 = 2(y-z)(x+y+z) = 2(x-y)(x+y+z) \quad | : 2$$

$$\begin{aligned} (y-z-x+y)(x+y+z) &= 0, \text{ т.к. } x, y, z > 0, \text{ то } x+y+z > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y-x-z &= 0 \\ 2y &= x+z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) (2) &= y^2 + 3 = (2y)^2 \\ 3y^2 &= 3 \end{aligned}$$

$$y = 1, \text{ т.к. } y > 0 \Rightarrow x+z = 2 \Rightarrow z = 2-x \quad \text{Ответ: } \left(\frac{7}{6}, 1, \frac{5}{6}\right)$$

$$5) (1) = x^2 + 2 = (1+2-x)^2$$

$$x^2 + 2 = 9 + x^2 - 6x$$

$$x = \frac{7}{6} > 0 \Rightarrow z = 2 - \frac{7}{6} = \frac{5}{6} > 0$$

6) Проверка

$$\begin{cases} \frac{49}{36} + 2 = \frac{121}{36} - \text{верно} \\ 1 + 3 = 2^2 - \text{верно} \end{cases}$$

$$\frac{25}{36} + 4 = \frac{169}{36} - \text{верно}$$

все верно

55-9-61

152 Пусть до сбора II обслуги x человек, а после y ,
 тогда I до: $0,75x$, после: $1,2y$. $\Rightarrow x=4\alpha$, т.к. $0,75x \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}$
 $y=5\beta$, т.к. $1,2y \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{N}$

~~Всего~~ Всего II обслуги: $x+y$, а I: $0,75x+1,2y$,

по условию если $(x+y) - 100\%$, то $(0,75x+1,2y) - 110\% \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0,75x+1,2y = 1,1(x+y) \quad | \cdot 20$$

$$15x + 24y = 22x + 22y$$

$$2y = 7x$$

$$10\beta = 28\alpha \quad | :2$$

$$5\beta = 14\alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta = 14c, c \in \mathbb{N} \\ \alpha = 5c, c \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \text{, т.к. } (5, 14) = 1 \Rightarrow \alpha : 5$$

$$\beta : 14$$

$$2) 1,75x + 2,2y < 250$$

$$35c + 154c < 250$$

$$189c < 250, \text{ если } c \geq 2, \text{ то } 189c > 250 \Rightarrow c=1, \text{ т.к. } c \in \mathbb{N}$$

$\Downarrow$

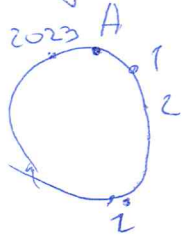
$$\text{II обслуги: } x+y = 4\alpha + 5\beta = 20c + 70c = 90 \text{ человек}$$

Ответ: 90 человек.

20p.

$\rightarrow$
 см. добор
 game

35-9-61
 53 Пронумеруем точки после A от 1 до 2023 по часовой стрелке:



Для каждого многоуг. не содержит A. поставим

$A: (a_1, a_2, \dots, a_n)$ — ^{номера} вершины из которых он состоит.
 поставим в соответствующие многоуг. с A: $(a_1, \dots, a_n, A)$,

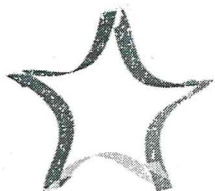
заметьте, если какие-то многоуг. совпадут, а до этого
 были различия: $(b_1, \dots, b_m, A)$ и $(c_1, \dots, c_l, A)$, то

I: $m=l$, и $b_i = c_i$, т.к. их пересечение изл от A $\Rightarrow$
 $\Rightarrow (b_1, \dots, b_m) = (c_1, \dots, c_l)$ — противоречие.

Теперь заметим, что для ~~каждого~~ треугол. $(1, 2, A)$ — нет ему соотв.
 т.к. $(1, 2)$ -ые многоуг. $\Rightarrow$ многоуг. содержит верш. A — больше

3 стр.

→
 см. на
 одере



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

55-9-61

шифр _____

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

№4. Пусть x_1, x_2, x_3 - корни $\varphi(x) = 0$, тогда

4 стр.

$$\varphi(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$\varphi(g(x)) = (g(x) - x_1)(g(x) - x_2)(g(x) - x_3) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) - x_i \neq 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

$$x^2 + 6x + 2024 - x_i \neq 0$$

$$D = 36 - 4(2024 - x_i) \leq 0$$

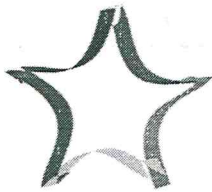
$$2024 - x_i \geq 9, \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

$$\varphi(g(0)) = \varphi(2024) = (2024 - x_1)(2024 - x_2)(2024 - x_3) >$$

$$\geq 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$$

т.е.

→
см. далее



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 85-9-61

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

№6

Стр.

Дано:

$$t_A = t_B = 0^\circ\text{C}$$

$$S = 15 \text{ см}^2,$$

$$\rho_B = 1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3},$$

$$\rho_A = 0,9 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$$

$$m_A - ?$$

$$m_B - ?$$

Решение:

1) В силу $t_A = t_B = 0^\circ\text{C}$ - лёд плавится только от
тепла плавления. Т.к. $\rho_A < \rho_B$, то при

таянии вода увеличивается его объём $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ все вода после таяния и после оставалась
внутри сосуда.

2) $V_{\text{сосуда}} = V = V_B + V_A$ - объёмы воды и льда вначале
т.к. $h(0) = 120 \text{ см} \Rightarrow V = h(0) \cdot S = V_B + V_A$,

$h(20) = 115 \text{ см}$ - первый момент времени,

когда лёд $\rightarrow$ вода, пусть $V_A \rightarrow V_B'$, тогда

$$V' = h(20) \cdot S = V_B + V_B'$$

$$V - V' = S(h(0) - h(20)) = \underline{V_A - V_B'} = \frac{m_A}{\rho_A} - \frac{m_A}{\rho_B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_A = \frac{S(h(0) - h(20))\rho_A\rho_B}{\rho_B - \rho_A} = \frac{15 \text{ см}^2 \cdot 5 \text{ см} \cdot 0,9 \cdot 1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}}{1 - 0,9} =$$

$$= 675 \text{ г}$$

$$3) V = h(0) S = V_B + V_A \Rightarrow V_B = \frac{m_B}{\rho_B} = h(0) S - \frac{m_A}{\rho_A} \Rightarrow$$

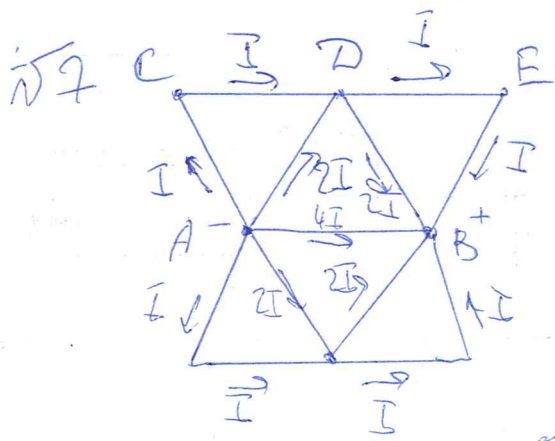
$$\Rightarrow m_B = \frac{(h(0) S \rho_A - m_A) \cdot \rho_B}{\rho_A} = \frac{1 \cdot (120 \text{ см} \cdot 15 \text{ см}^2 \cdot 0,9 - 675 \text{ г})}{0,9} =$$

$$= 1050 \text{ г}$$

В

Ответ: $m_A = 675 \text{ г}$; $m_B = 1050 \text{ г}$

55-9-61

Дано: $R_0 = 10 \text{ Ом}$ 

Решение:

~~Решение~~ Найдем напряжение $A - \ominus, B - \oplus$, тогда1) пусть по AC течет ток I , тогда по CD тоже течет I

$$2) \varphi(A) - \varphi(D) = I \cdot R_0 + I \cdot R_0 = I_{AD} \cdot R_0 \Rightarrow I_{AD} = 2I$$

$$3) \varphi(D) - \varphi(B) = R_0 \cdot I_{DE} + R_0 \cdot I_{EB} = R_0 \cdot I_{DB},$$

$$I_{DE} = I_{EB} \Rightarrow I_{DB} = 2 \cdot I_{DE}, \text{ а } I_{DE} + I_{DB} = 2I + I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{DE} = I_{EB} = I, \text{ а } I_{DB} = 2I$$

$$4) \varphi(A) - \varphi(B) = 4I \cdot R_0 = R_0 \cdot I_{AB} \Rightarrow I_{AB} = 4I. \text{ Так как}$$

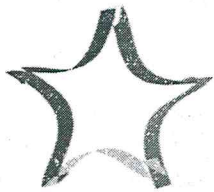
тока в ветвях получилась I течет ток $4I$ по ветви AB , т.к. контур. сущ. отн. AB

$$5) R_{\text{общ}} = \frac{4I R_0}{I} = 4R_0 = 40 \text{ Ом}$$

$$\text{Ответ: } R_{\text{общ}} = 40 \text{ Ом}$$

6 стр.

→
coll. games



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 55-9-61

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

8.1) Заметим, что пересечение прямых, содержащих
лучи и сами точки их отрезания. Уравнение
прямой I: $y = -2x + 7$,
а II: $x - 5 = 0 \Rightarrow y = y \Rightarrow -2x + 7 = x - 5$

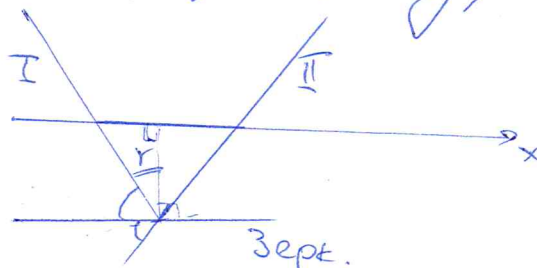
$$12 = 3x$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 4 - 5 = -1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ точка A - отрезания имеет коорд ~~(1; 4)~~ (4; -1)

2) I прямая образует с горизонтальной осью α : $\tan \alpha = 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \alpha = 63,45^\circ$, т.к. $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$, а II пр. угол β : $\tan \beta = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \beta = 45^\circ, \text{ т.к. } \frac{\pi}{2} > \beta > 0,$$



3) Т.к. зеркало - бисс. внеш.

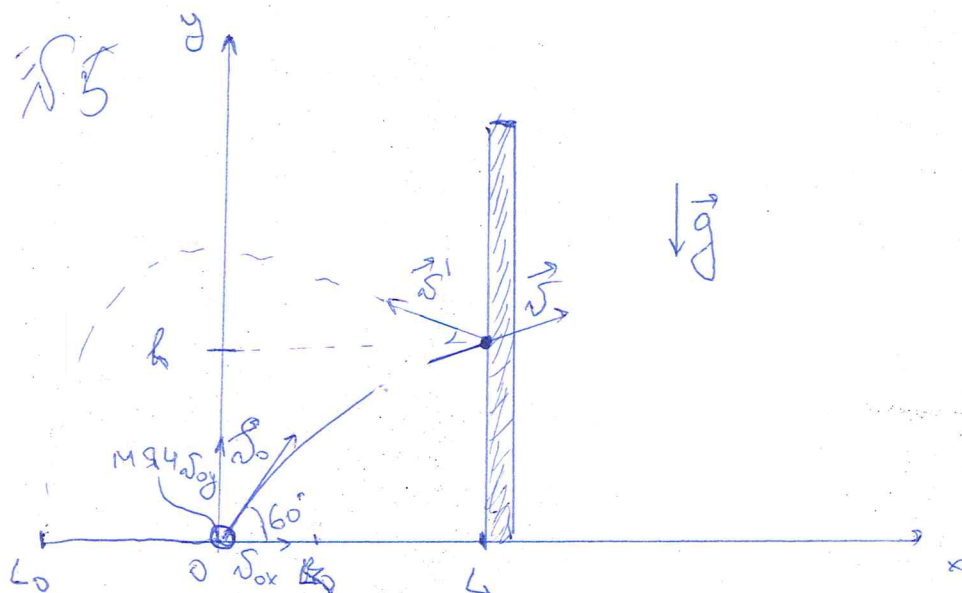
угла, т.к. угол падения = углу отр. $\frac{\alpha + \beta}{2} = 54,225^\circ$, $\gamma = 90 - \alpha =$

$$= 26,55^\circ \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} + \delta = 80^\circ, 775^\circ \Rightarrow \text{Угол зеркала с OX}$$

$$\text{равен } 90 - \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \delta \right) = 9,225 \approx 9^\circ$$

Ответ: A(4; -1), 9°

или на обрат



1) Сообразим горизонту Ox , а перпендикулярно ей Oy . Проецируем $\vec{v}_0$ на оси: $v_{0y} = v_0 \cdot \sin 60^\circ$,
 $v_{0x} = v_0 \cdot \cos 60^\circ$; $\vec{g}$: $g_y = -g$

2) Пусть через t_0 случилось упругое столкновение:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}_y t_0 \Rightarrow v_y = v_{0y} - g t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{v_{0y} - v_y}{g}$$

v_y — проекция $\vec{v}$ на Oy , а v_x — на Ox , причем

$$v_x = v_{0x} \Rightarrow v_y = \sqrt{v^2 - v_{0x}^2} = \sqrt{10 \cdot 50} \frac{m}{c} = 10.55 \frac{m}{c}$$

3) За t_0 : $L = v_{0x} \cdot t_0 = v_{0x} t_0$, т.к. проекц. $\vec{g}$ на Ox :
 $g_x = 0$

4) Т.к. удар о стенку абсолютно упругий, то $\vec{v} \rightarrow \vec{v}'$,
 $v_y \rightarrow +v_y$, $v_x \rightarrow -v_x$.

5) ~~Теперь для обратного движения~~
~~то же самое~~

53-

5) Пусть t_1 - время через которое шар прыгнул,

тогда: $h = \vec{v}_{0y} t_1 + \frac{\vec{g}_y t_1^2}{2} = \frac{(\vec{v}_y)^2 - (\vec{v}_{0y})^2}{2\vec{g}_y}$, h - высота
откуда, из условия мар.

$$\vec{v}_{0y} t_1 + \frac{-g t_1^2}{2} + \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2g} = 0 \quad | : (-1)$$

$$\frac{gt_1^2}{2} - \vec{v}_{0y} t_1 + \frac{v_{0y}^2 - v_y^2}{2g} = 0$$

$$5t_1^2 - 20\sqrt{3}t_1 - 35 = 0 \quad | : 5$$

$$D = 1200$$

$$t_1^2 - 4\sqrt{3}t_1 - 7 = 0$$

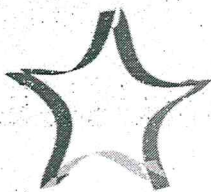
$$D = 48 + 28 = 76$$

$$t_1 = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{76}}{2} = (2\sqrt{3} + 2\sqrt{19}) \text{ с, } t_1 > 0$$

тогда: 6) За t_1 , $L_0 = |\vec{v}_x t_1| = v_{0x} \cdot t_1$

$$2) L_0 - L = L_0 = v_{0x} t_1 - v_{0x} t_0 = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}} (2\sqrt{3} + \sqrt{19} - 2\sqrt{5} - \sqrt{5}) = 20(\sqrt{19} - \sqrt{5}) \text{ м} = 42,5 \text{ м}$$

Ответ: 42,5 м.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 55-9-61

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

55.

5) Пусть через t_1 тело ~~к~~ ~~касается~~ приземлится, тогда

~~$$\vec{v}_x = v_{0x} + a_x t_1 \Rightarrow 0 \neq$$~~

~~$$h = -v_{0y} t_1 + \frac{g t_1^2}{2} = \frac{(v_y)^2 - (v_{0y})^2}{2g}, \text{ где } h - \text{высота}$$~~

стенки, которой коснулся мяч. $\Rightarrow$

~~$$\Rightarrow -v_{0y} t_1 + \frac{g t_1^2}{2} = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{-2g} \quad | \cdot (-1)$$~~

~~$$\frac{g t_1^2}{2} + v_{0y} t_1 - \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2g} = 0$$~~

~~$$5 t_1^2 + 20\sqrt{3} t_1 + 35 = 0 \quad | : 5$$~~

~~$$t_1^2 + 4\sqrt{3} t_1 + 7 = 0$$~~

~~$$\text{Т.к. } t_1 > 0, \text{ то } t_1 = (\sqrt{3} - 2\sqrt{3})c$$~~

~~$$D = 48 - 4 \cdot 7 = 20$$~~

~~$$t_{1,2} = \frac{-4\sqrt{3} \pm \sqrt{20}}{2}$$~~

~~$$\text{6) За } t_1: L_0 L = |v_x t_1| \Rightarrow L - L_0 L = L_0 = v_{0x} t_0 - |v_x t_1|$$~~

~~$$L_0 = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{(20\sqrt{3} - 10\sqrt{3})}{10} \cdot c - 20 \frac{\text{м}}{\text{с}} (2\sqrt{3} - \sqrt{3})c =$$~~