



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 63-11-122

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	11	13	9	2	10	10	10	15	80

Вариант 1

~ 1.

$$9\sqrt{2 - \log_2 x} - 2/4 \log_2 x - 7/ \leq 9 \log_2 x - 2/4 \sqrt{2 - \log_2 x} - 7/$$

$$9\sqrt{2 - \log_2 x} + 2/4 \sqrt{2 - \log_2 x} - 7/ \leq 9 \log_2 x + 2/4 \log_2 x - 7/$$

В данном неравенстве можно заметить функцию:

$$f(a) = 9a + 2/4a - 7/$$

$$f(a) = \begin{cases} 9a + 8a - 14, & a \geq \frac{7}{4} \\ 9a - 8a + 14, & a < \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$f(a) = \begin{cases} 17a - 14, & a \geq \frac{7}{4} \\ a + 14, & a < \frac{7}{4} \end{cases}$$

Построим график данной ф-ции

$$f(0) = 0 + 14 = 14$$

$$f(1) = 1 + 14 = 15$$

$$f(\frac{7}{4}) = 17 \cdot \frac{7}{4} - 14 = 15 \frac{3}{4}$$

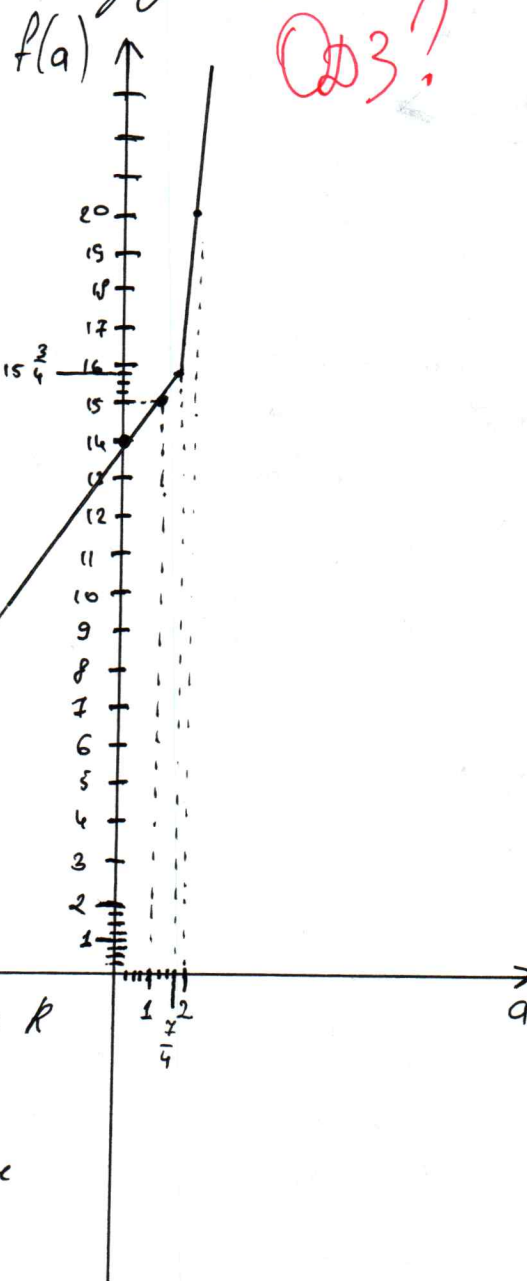
$$f(2) = 17 \cdot 2 - 14 = 20$$

Из графика видно, что $f(a)$ возрастает на $\mathbb{R}$ и непрерывна.

↓
неравенство можно записать в след. виде

$$f(\sqrt{2 - \log_2 x}) \leq f(\log_2 x)$$

т.к. $f(a)$ и непрерывна

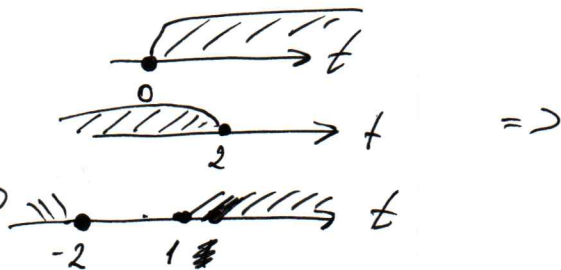


$$\sqrt{2 - \log_2 x} \leq \log_2 x$$

пусть $\log_2 x = t$

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ 2 - t \geq 0 \\ \sqrt{2 - t} \leq t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t \leq 2 \\ t^2 + t - 2 \geq 0 \end{cases}$$

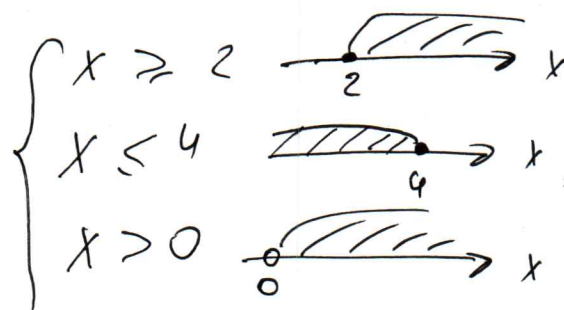


~~т.е.~~ $t \in [1; 2]$, т.е. $1 \leq t \leq 2$

Вернемся к замене

$$\begin{cases} \log_2 x \geq 1 \\ \log_2 x \leq 2 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 x \geq \log_2 2 \\ \log_2 x \leq \log_2 4 \\ x > 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow x \in [2; 4]$

Ответ: $x \in [2; 4]$

~2.

У условия задачи:

- если I клетка белая, то соседняя точно серая
- если I клетка черная, то соседняя точно серая ^{либо}
- если I клетка серая, то соседняя может быть ~~и~~ белой, ^{либо} черной.

Из этого следует, что серая и ~~и~~ белая/черная клетки будут расположены в шахматном порядке

~~тогда~~ Рассмотрим данный нам прямоугольник, всего в нем $8 \cdot 12 = 96$ клеток

48 из них точно серые (по усл.)

Остальные 48 либо белые, либо черные (т.е. два варианта раскраски)

Первая клетка может быть серой, либо черной/белой.

$\Rightarrow$ количество вариантов раскрашивания прямоугольника, удовлетворяющих условию $= 2^{48} \cdot 2 = 2^{49}$

Рассмотрим кол-во всевозможных условий раскрашивания

14-12-524



на одну клетку с 3 вариантами краски
всего клеток 96 $\Rightarrow$ кол-во всевозможных
вариантов = 3^{96}

63-11-122

Найдём вероятность, что при случайном
раскрашивании клеток, этот раскрасит прямоугольник
так, что стороны клетки будут равны клеткам и
не будет равной длине стороны.

$$p = \frac{\text{кол-во вар. удовлетворяющих усл.}}{\text{кол-во всевозможных вар}} = \frac{2^{49}}{3^{96}}$$

Выв.: вероятность равна $\frac{2^{49}}{3^{96}}$

+

~ 3.

$$f(x) = ax^2 + (a+1)x + b$$

Т.к. функция принимает неотриц. значения при всех x ,
то выб. парабола должна быть направлена вверх, т.е.

a=0?

$a > 0$, а также $D \leq 0$.

$$D = (a+1)^2 - 4ab \leq 0 \quad (1)$$

надо найти наименьшее значение выражения

$$2a + b + 1$$

однажды выражение за y

$$y = 2a + b + 1$$

$$b = y - 2a - 1$$

подставим в (1)

$$(a+1)^2 - 4a(y - 2a - 1) \leq 0$$

$$a^2 + 2a + 1 - 4ay + 8a^2 + 4a \leq 0$$

$$9a^2 + 6a + 1 - 4ay \leq 0$$

$$(3a+1)^2 - 4ay \leq 0$$

$$y \geq \frac{(3a+1)^2}{4a}$$

Т.к. надо найти мин. значение y , то рассмотрим правую

Задать неравенства, как пр-цию

$$f(a) = \frac{(3a+1)^2}{4a}$$

$$f'(a) = \frac{2(3a+1) \cdot 4a \cdot 3 - 4(3a+1)^2}{16a^2}$$

$$f'(a) = \frac{9a^2 - 1}{4a^2}$$

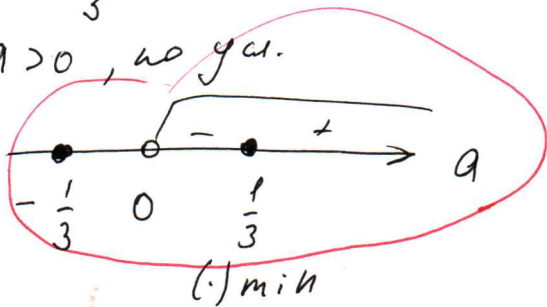
$$\frac{9a^2 - 1}{4a^2} = 0$$

$$a \neq 0$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

$a > 0$, но уа.



$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(3 \cdot \frac{1}{3} + 1\right)^2}{4 \cdot \frac{1}{3}} = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow \text{мин. значение} = 3$$

Ответ: 3.

нб.

Дано:

$$R_1 = 10 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 20 \text{ Ом}$$

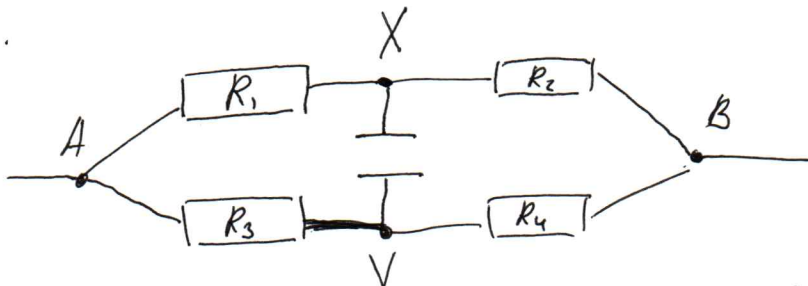
$$R_3 = 30 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 40 \text{ Ом}$$

$$U_0 = 210 \text{ В}$$

найти:

q - ?



Т.к. подключим источник постоянного тока, то через достаточно большое время конденсатор полностью зарядится и ток через него не будет течь.

$$C = \frac{q}{\varphi_x - \varphi_y} \Rightarrow q = C(\varphi_x - \varphi_y)$$

11-12-527

$$\varphi_a - \varphi_x = I_1 R_1$$

$$I_1 = \frac{U_0}{R_{12}}$$

$$R_{12} = R_1 + R_2 \text{ (т.к. соедин. поск.)}$$

$$I_1 = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

$$(1) \varphi_a - \varphi_x = \frac{U_0 R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\varphi_a - \varphi_y = I_3 \cdot R_3$$

$$I_3 = \frac{U_0}{R_{34}}$$

$$R_{34} = R_3 + R_4 \text{ (т.к. соедин.)}$$

$$I_3 = \frac{U_0}{R_3 + R_4}$$

$$(2) \varphi_a - \varphi_y = \frac{U_0 R_3}{R_3 + R_4}$$

вычтем из (2) - (1)

$$-\varphi_y + \varphi_x = \frac{U_0 R_3}{R_3 + R_4} - \frac{U_0 R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\varphi_x - \varphi_y = \frac{U_0 R_3 (R_1 + R_2) - U_0 R_1 (R_3 + R_4)}{(R_3 + R_4) \cdot (R_1 + R_2)}$$

$$Q = C(\varphi_x - \varphi_y) = C \cdot \left(\frac{U_0 R_3 (R_1 + R_2) - U_0 R_1 (R_3 + R_4)}{(R_3 + R_4) (R_1 + R_2)} \right) =$$

$$= 200 \cdot 10^{-6} \left(\frac{210 \cdot 30 (10 + 20) - 210 \cdot 10 (30 + 40)}{(30 + 40) (10 + 20)} \right) =$$

$$= 200 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{210(900 - 700)}{70 \cdot 30} = 200 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 4000 \text{ мкКл}$$

Рез: 4000 мкКл

г.

63-11-122



~ 8
 Дано:
 $D_p = -4 \text{ гнр}$
 $d_1 = 5 \text{ см} = 0,05 \text{ м}$
 $d_2 = 20 \text{ см} = 0,2 \text{ м}$

Найти:
 $D_c = ?$

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{AB + |F_1|}{|F_1|} = \frac{0,2}{0,05} \quad (\text{т.к. лучи не пересекаются})$$

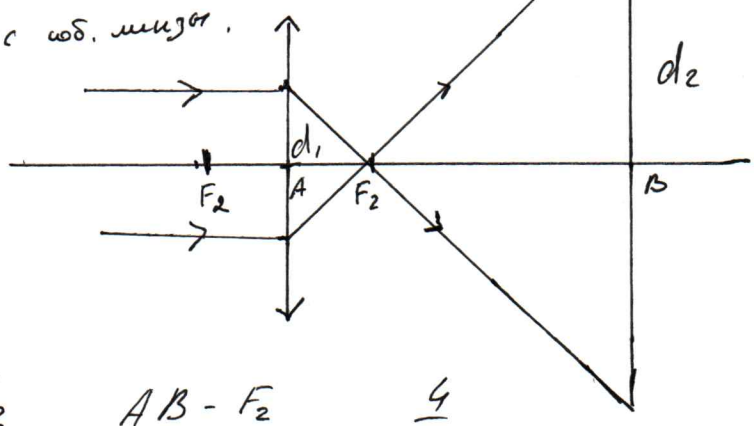
$$\frac{AB + |F_1|}{|F_1|} = \frac{4}{1}$$

$$AB + |F_1| = 4|F_1|$$

$$3|F_1| = AB$$

~~$AB = 3|F_1|$~~

т.к. после замены рассеивающей линзы на собирающую
 размер изображения на экране не изменился, ~~то~~
 F_2 - фокус соб. линзы.



$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{AB - F_2}{F_2} = \frac{4}{1}$$

$$AB - F_2 = 4F_2$$

$$5F_2 = AB$$

$$5F_2 = 3 \cdot |F_1|$$

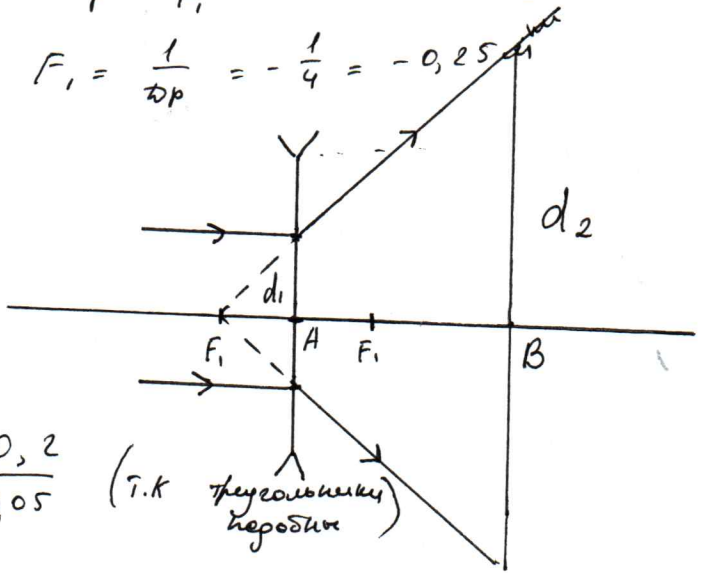
$$F_2 = \frac{3 \cdot |F_1|}{5}$$

$$D_c = \frac{5}{3 \cdot |F_1|} = \frac{5}{3 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{3} = \frac{20}{3} \approx 6,7 \text{ гнр}$$

$$D_p = \frac{1}{F_1}$$

F_1 - фокус рас. линзы.

$$F_1 = \frac{1}{D_p} = -\frac{1}{4} = -0,25 \text{ м}$$



11-12-521



Обеи: оптическая сила собирающей линзы 67 диоп. 163-11-122

~ 7.

Дано:

$$V_2 = V_3$$

$$T_3 = T_1$$

$$V_2 = 2V_1$$

$$|A_{12}| = 2,16 |A_{31}|$$

η - ?

Решение:

$$1-2 \quad pV = \nu RT \quad ; \quad T = kV^2$$

$$pV = \nu RkV^2$$

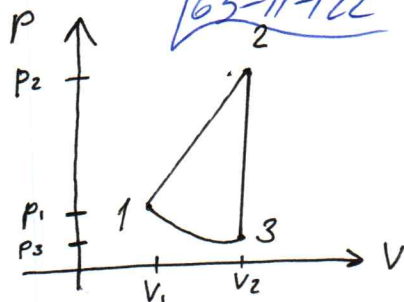
$$p = \nu Rk$$

$$T \uparrow \quad V \uparrow$$

$$2-3 \quad V = \text{const} \quad \frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3}$$

$$3-1 \quad T = \text{const} \quad p_3 V_3 = p_1 V_1$$

$$\text{т.к. } V_3 = V_2 = 2V_1 \Rightarrow p_3 = \frac{p_1}{2}$$



$$T \downarrow \Rightarrow p \downarrow$$

$$V \downarrow \Rightarrow p \uparrow$$

$$\eta = 1 - \frac{|Q_x|}{Q_4} \cdot 100\%$$

$$Q_x = Q_{12}$$

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}$$

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{3}{2} (2V_1 p_2 - p_1 V_1) =$$

$$A_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) = \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot V_1$$

$$Q_x = Q_{23} + Q_{31}$$

$$Q_{23} = -\Delta U_{23} \quad ; \quad Q_{31} = -A_{31}$$

$$\Delta U_{23} = \frac{3}{2} (p_3 V_3 - p_2 V_2) = \frac{3}{2} \left(\frac{p_1}{2} \cdot 2V_1 - p_2 \cdot 2V_1 \right) =$$

$$= \frac{3}{2} (p_1 V_1 - 2p_2 V_1)$$

$$Q_{12} = \frac{3}{2} (2p_2 V_1 - p_1 V_1) + A_{12} =$$

$$Q_x = -\frac{3}{2} (p_1 V_1 - 2p_2 V_1) + A_{31} = 3A_{12} + A_{31}$$

$$3 \cdot 2,16 A_{31} + A_{31} = 6,48 A_{31} \Rightarrow A_{31} = 7,48 A_{31}$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_x}{Q_4} = 1 - \frac{A_{31}}{A_{31}} \approx$$

~ 5.

Дано:

m

q

$t_0 = 0$

h

B

E

найти

$t - ?$



по II з. Ньютона

$$F_u = m a_y$$

$$F_u = Bq v \sin \alpha \quad ; \quad a_y = \frac{v^2}{R}$$

$$Bq v = \frac{m v^2}{R}$$

$$R = \frac{m v}{Bq}$$

$$h_1 = k = \frac{m v}{Bq}$$

$$t_1 = \frac{1}{4} T$$

т.к. траектория приближена $\frac{1}{4}$ окружности.

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi \cdot m v}{Bq v}$$

$$t_1 = \frac{1}{4} T = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi m}{Bq} = \frac{\pi m}{2 Bq}$$

т.к. ~~траектория~~ $v_0 = v$, т.к. ~~траектория~~ v постоянна. не меняется траектория и v постоянна.

$$h_1 = \frac{a t_1^2}{2}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 h_1}{a}}$$

по II з. Ньютона

$$F_{zu} = m a$$

$$F_{zu} = E q$$

$$E q = m a$$

$$a = \frac{E q}{m}$$

$$h_1 = k = \frac{m v}{Bq}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 m v \cdot m}{Bq E q}} = \sqrt{\frac{2 m^2 v}{E B q^2}} = \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2 v}{B E}}$$

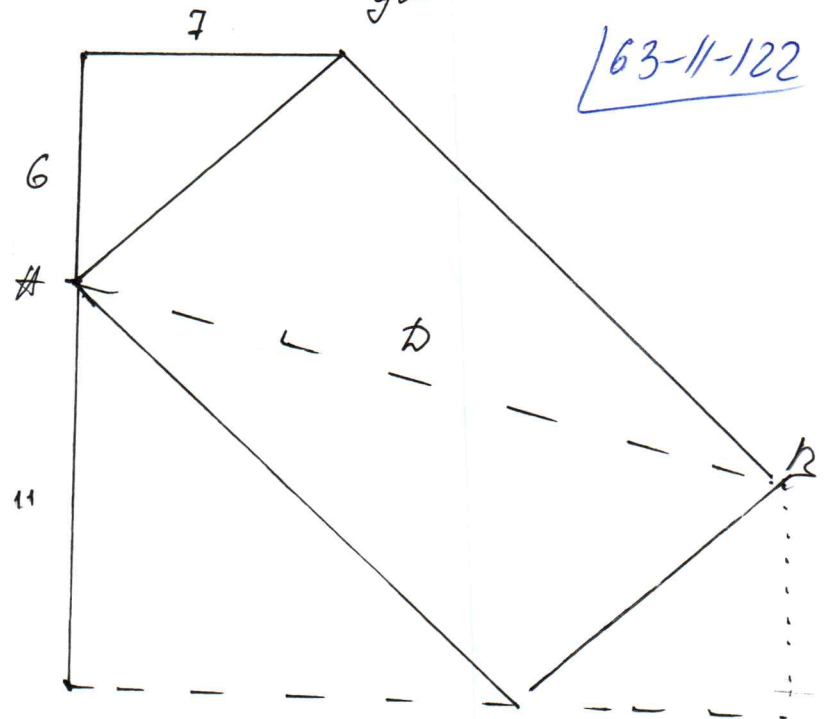
$$t = t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{2 Bq} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2 v}{B E}}$$

7-12-527

и 4. 7

диагональное ссз.

63-11-122



всего кубиков в прямоугольном параллелепипеде

$$7 \cdot 6 \cdot 11 = 462.$$

~~и она проходит по диагонали~~

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{7^2 + 6^2 + 11^2} = \sqrt{49 + 36 + 121} = \sqrt{186}.$$

~~нужно~~ Надо найти кол-во граничных кубиков
которые проткнула диагональ

Диагональ будет пересекать кубики во всех
точках краев A и B (т.е. - 2)

В. Если не учитывать это, то она пересечет
количество кубиков равное $\frac{P+1}{4}$, т.е. $a+b+c = 7+6+11 = 24$.

т.е. кол-во кубиков, которое пересекет диагональ =
 $24 - 2 = 22$

Ответ: 22. кубика пересекет диагональ.