

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 61/2-11-86

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	0	4	13	7	15	10	10	0	63

XIV

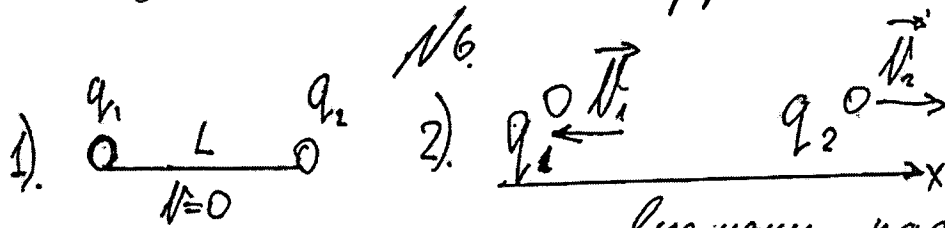
Вариант 1

4

лист 1 из 4

Дано: L, q_1, q_2
 m_1, m_2

$v_1 = ?$ $v_2 = ?$



Так как прошло много времени, расстояние между шариками стало велико $\Rightarrow$ энергии их взаимодействия $\rightarrow 0$. ЗСЭ: $E_1 = E_2$; $E_1 = \frac{kq_1q_2}{L}$; $E_2 = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{kq_1q_2}{L} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}$

ЗСУ: Ох: $0 = m_2v_2 - m_1v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{m_2v_2}{m_1} \Rightarrow \frac{kq_1q_2}{L} = \frac{m_1m_2^2v_2^2}{2m_1^2} + \frac{m_2v_2^2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2kq_1q_2 = v_2^2 L \left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2 \right) \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2}{m_2 L \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right)}} \Rightarrow v_1 = \frac{m_2}{m_1} \sqrt{\frac{2kq_1q_2}{m_2 L \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right)}} =$

$\neq \frac{2kq_1q_2}{m_2 L \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right)} = \sqrt{\frac{2kq_1q_2}{m_1 L \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right)}}$

Ответ: $v_1 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2}{m_1 L \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right)}}$; $v_2 = \sqrt{\frac{2kq_1q_2}{m_2 L \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right)}}$

N5.

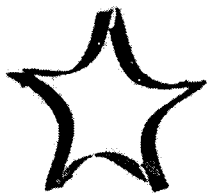
Так как $a \neq \text{const}$, необходимо учитывать силу сопротивления воздуха. $\vec{F}_c = -kv$. $\vec{F}_c + m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow -kv + mg = ma$

$kv + mg = ma$. Ох: $a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow a_x dt = dv_x$

$\int_{v_k}^{v_2} a_x dt = \int_{v_k}^{v_2} dv_x \Rightarrow v_k - v_H = a_x t$. Ох: $-v_k + a = 0$. $S_H = \frac{a_2 + a_1}{2} t$

$v_k = \int a dt \Rightarrow v_k = S_k$. Из графика: $S_H = \frac{20+10}{2} \cdot 2 = 30$ $\Rightarrow v_k = 30$ м/с.

Ответ: 30 м/с.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

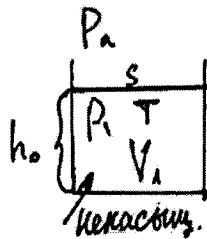
Шифр 61/2-11-86

Мет 2 из 4

Дано: $T=100^\circ\text{C}$; $m_n=0$;
 $h_0=30\text{ см}$; $h=10\text{ см}$; $p_2=2p_1$;
 $S=100\text{ см}^2$; $m_1=?$

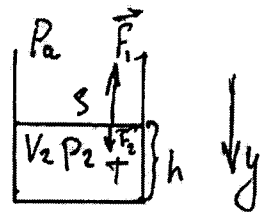
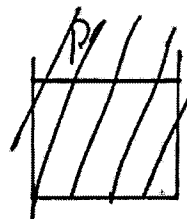
m_n — масса поршня.

1.



№4.

2.



$$O_y: F_2 - F_1 = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 \Rightarrow p_1 S = p_2 S \Rightarrow p_2 = p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{p_2}{2}$$

1. Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона: $p_1 V_1 = \frac{m_1}{M} R T$. $V_1 = h_0 S$

$$m_1 = \frac{p_1 h_0 S M}{R T} \quad m_n = \frac{10^5 \cdot 0,3 \cdot 100 \cdot 10^4 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8,31 \cdot 373} \approx 8,7 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \quad (M=18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}; R=8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}})$$

Ответ: $m_1 = 8,7 \cdot 10^{-4} \text{ кг}$.

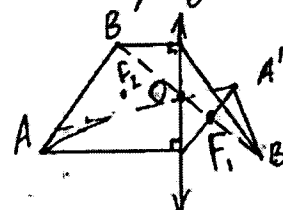
№8.

1. Прямые BB' и AA' пересекаются в оптическом центре линзы (по 3-му св-ву линз). Координаты $O(36; 36)$.

2. Прямую перпендикулярную из A и B на линзу (она расположена на прямой $x=36$) и соединю их с изображениями (A' и B'). Фокус находится в точке пересечения (F). Таким образом коорд.

Фокусов: $F_1(39; 39)$; $F_2(31; 34)$.

Ответ: $O(36; 36)$; $F_1(39; 39)$; $F_2(31; 34)$.



№4.

$$a_1 = \cos 10^\circ; a_2 = \cos 100^\circ; a_n = \cos(10^n)^\circ \dots$$

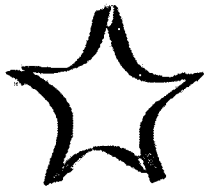
$$(10^n)^\circ = 99 \dots 90^\circ + 10^\circ \Rightarrow (10^n)^\circ = \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{n-1 \text{ раз}} + 10^\circ$$

$\cos 100^\circ = ?$

111...1 при делении на 4 даёт остаток 3, т. е. 90 точки

$$2\pi \cdot k + 10^\circ \text{ не хватает } \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{IV координатная четверть} \Rightarrow \text{для } n > 2: \cos(10^n)^\circ = -\sin 10^\circ \Rightarrow a_1 \cos x + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \cdot \sin x = \cos 10^\circ \cdot \cos x - \sin 10^\circ \sin x = \cos(10^\circ + x) \Rightarrow -1 \leq \cos(10^\circ + x) \leq 1 \Rightarrow \text{наим. знач. } \cos(10^\circ + x) = -1.$$

Ответ: -1 .



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Шифр 61/2-11-86

$$\begin{cases} \log_3 x \cdot \log_4 y = \frac{1}{3} \\ \log_2(xy) = \frac{3}{2} \\ \log_3 y \cdot \log_5 z = \frac{3}{5} \\ \log_5(xy) = \frac{5}{6} \\ \log_2 z \cdot \log_3 x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2(xy) = \frac{3}{2} \\ \log_3(x) \log_2(y) = \frac{3}{2} \\ \log_5(z) = \frac{5}{6} \\ \log_3(y) \log_5(z) = \frac{3}{5} \\ \log_2(zx) = \frac{4}{3} \\ \log_3 z \log_2 x = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3(xy) = \frac{2}{3} \\ \log_3 x = \frac{2}{3} \\ \log_2(zy) = \frac{5}{6} \\ \log_3 y = \frac{5}{6} \\ \log_2(xz) = \frac{4}{3} \\ \log_3 z = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\log_3 y + 1}{\log_3 y} = \frac{5}{6} \\ \frac{\log_3 z + 1}{\log_3 z} = \frac{4}{3} \\ \frac{\log_3 x + 1}{\log_3 x} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\log_3 y}{\log_3 z \log_3 y} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{5}{6} \\ \frac{\log_3 z}{\log_3 x \log_3 z} + \frac{1}{\log_3 z} = \frac{4}{3} \\ \frac{\log_3 x}{\log_3 y \log_3 x} + \frac{1}{\log_3 x} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\log_3 y} + \frac{1}{\log_3 x} = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{\log_3 z} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 z} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_3 y} = \frac{3}{2} - \frac{1}{\log_3 x} = \frac{5}{6} - \frac{1}{\log_3 z} \Rightarrow \log_3 z = 3 \Rightarrow z = 27.$$

1. Верно $\frac{1}{\log_3 y} \Rightarrow \frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{5}{6} \Rightarrow \log_3 y = 2 \Rightarrow y = 9.$

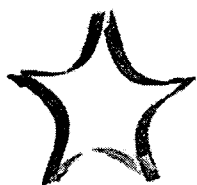
3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{\log_3 x} = \frac{3}{2} \Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3.$

Ответ: $x=3; y=9; z=27.$

Ввиду замены: $a=2^x; b=\sin^2 y; c=\ln^3 z \Rightarrow a^2+b^2+c^2=16.$

По неравенству Коши-Буняковского-Шварца: $2^{x+1}+3\sin^2 y-6\ln^3 z = 2a+3b-6c \leq \sqrt{2^2+3^2+(-6)^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 7\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 28 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{x+1}+3\sin^2 y-6\ln^3 z \leq 28.$



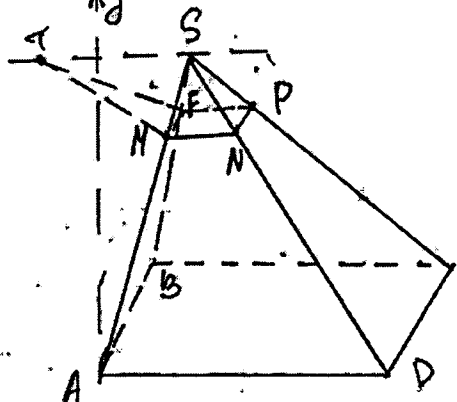
Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 61/2-11-86

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

Лист 4 из 4



Дано: ABCD - пар. мн., $\frac{SM}{MA} = \frac{1}{2}$, $\frac{SN}{ND} = \frac{1}{3}$, $PC = \frac{1}{4}$
 $F \in BS$ и MNP . $\frac{SF}{FB} = ?$

ASD и BSC прор. τ - z AD и BC; $AD \parallel BC \Rightarrow$
 $\Rightarrow ASD \cap BSC = ST$, $ST \parallel AD \parallel BC$ (T - точка
 $\S ASD \cap BSC = SX$; $SX \parallel AD \parallel BC$ (T - точка $SX \cap MN$).

$BS \cap TP = F \Rightarrow PNMF$ - искоемое сечение. $\Rightarrow MF \parallel NP \Rightarrow \angle FMT = \angle PNT$;

$\angle TFM = \angle TPN \Rightarrow \triangle TFM \sim \triangle TPN \Rightarrow \frac{TM}{TN} = \frac{TF}{TP} \Rightarrow$ данное отношение верно
 для их проекций на вертикальную ось y: $\frac{y(TM)}{y(TN)} = \frac{y(TF)}{y(TP)}$.

$y(TM) = H \frac{SM}{SA}$; $\frac{1}{y(TM)} = \frac{1}{H} \left(\frac{SM+MA}{SM} \right) \Rightarrow \frac{1}{H} \left(1 + \frac{MA}{SM} \right) = \frac{3}{H} \Rightarrow z(TM) = \frac{H}{3}$.

Аналогично, $z(TN) = \frac{H}{4}$; $z(TP) = \frac{H}{5}$. (H - расст. м-ду пл-стью ABC и
 параллельной ей пл-стью, проходящей τ - z S).

$\frac{4H}{3H} = \frac{5z(TF)}{H} \Rightarrow z(TF) = \frac{4}{15} H$

Кроме того, $\frac{1}{z(TF)} = \frac{1}{H} \left(\frac{SF+FB}{SF} \right) = \frac{1}{H} \left(1 + \frac{FB}{SF} \right) = \frac{15}{4H}$.

$\frac{FB}{SF} = \frac{11}{4} \Rightarrow \frac{SF}{FB} = \frac{4}{11}$.

Ответ: $\frac{4}{11}$.