

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 63-11-114

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	10	—	10	—	10	0	15	15	60

Вариант 2

3. $f(x) = ax^2 + (3a+1)x + b$ при $\forall x: f(x) \geq 0$. $4a+b \rightarrow \min$? $\exists 4a+b = S$.
 при $a=0$: $f(x) = x+b$ — линейная ф-ия, которая принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$.
 при $a < 0$: $f(x)$ — квадратичная ф-ия, принимающая отрицательные значения.
 к. ветви параболы графика этой ф-ии будут направлены вниз.
 при $a > 0$: $f(x)$ — кв. ф-ия, которая может принимать неотрицательные значения лишь при условии, что ее дискриминант ≤ 0 . Иначе, часть значений была бы отрицательной.

$$\Delta = (3a+1)^2 - 4ab \leq 0$$

$$4ab \geq (3a+1)^2$$

$$b \geq \frac{(3a+1)^2}{4a}$$

возможное $b = \frac{(3a+1)^2}{4a}$

$$4a+b = 4a + \frac{(3a+1)^2}{4a} = \frac{16a^2 + 9a^2 + 6a + 1}{4a} = \frac{25}{4}a + \frac{6}{4} + \frac{1}{4a} \rightarrow \min.$$

ищем производную S по a : $S' = \frac{25}{4} - \frac{1}{4a^2} = \frac{25a^2 - 1}{4a^2}$.

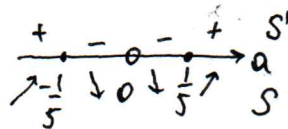
ищем т. экстремумов: $S'=0$; $\frac{25a^2 - 1}{4a^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 25a^2 - 1 = 0 \\ 4a^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm \frac{1}{5} \\ a \neq 0 \end{cases}$

к. $a > 0$, то единственная т. минимума на $a \in (0, +\infty)$ $a = \frac{1}{5}$.

$$S_{\min} = \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{6}{4} + \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{5}{4} + \frac{6}{4} + \frac{5}{4} = 4.$$

т. $(4a+b)_{\min} = 4.$

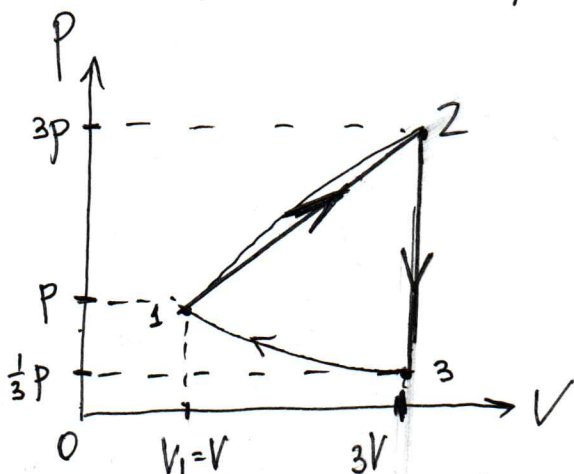
$b=?$



- №7 Дано:
- 1-2: $T = kV^2$
- 2-3: $V = \text{const}$
- 3-1: $T = \text{const}$
- $A_{12} = 3,64 \cdot |A_{31}|$
- $V_2 = V_3 = 3V_1 = 3V$
- $\eta = ?$
- Решение: Изобразим исходный график в осях $p-V$:
- ① $T = kV^2 \Rightarrow p_1 V_1 = \nu R T_1 \Rightarrow p_1 V_1 = \nu R k V_1^2 \Rightarrow p_1 = \nu R k V_1 = p$
- ② $T = kV^2 \Rightarrow p_2 V_2 = \nu R T_2 \Rightarrow p_2 \cdot 3V_1 = \nu R k 9V_1^2 \Rightarrow p_2 = 3\nu R k V_1 = 3p$
- ③ $V_2 = V_3$; $p_3 \cdot 3V_1 = \nu R T_1 \Rightarrow p_3 = \frac{1}{3} \nu R k V_1^2 \Rightarrow p_3 = \frac{1}{3} p$
 $T_3 = T_1$

Рисуем на уг-ке 1-2: $p_2 V = \nu R T \Rightarrow p_2 V = \nu R k V^2$

$p_{12} = \nu R k V$ - минимальная температура



$$U_1 = \frac{3}{2} p_1 V_1 = \frac{3}{2} pV; U_2 = \frac{3}{2} p_2 V_2 = \frac{3}{2} \cdot 9pV;$$

$$U_3 = \frac{3}{2} p_3 V_3 = \frac{3}{2} pV.$$

$$Q_{12} = U_2 - U_1 + A_{12} = \frac{3}{2} \cdot 8pV + \frac{p+3p}{2} \cdot 2V =$$

$$= 12pV + 4pV = 16pV > 0.$$

$$A_{12} = \frac{p+3p}{2} \cdot 2V = 4pV.$$

(Странно!!!)

$$Q_{23} = U_3 - U_2 < 0$$

$$Q_{31} = U_1 - U_3 + A_{31} = A_{31} < 0.$$

$$\eta = \frac{A}{Q_{12}} = \frac{A}{Q_{12}};$$

$$A = A_{12} - |A_{31}| = 3,64 |A_{31}| - |A_{31}| = 2,64 |A_{31}| \Rightarrow A = \frac{2,64 \cdot 4}{3,64} pV.$$

$$A_{12} = 3,64 |A_{31}| = 4pV \Rightarrow |A_{31}| = \frac{4}{3,64} pV$$

$$\eta = \frac{\frac{2,64 \cdot 4}{3,64} pV}{16pV} = \frac{2,64 \cdot 4}{3,64 \cdot 16} = \frac{2,64}{3,64} = \frac{66}{364} \approx 0,18$$

Ответ: $\eta = 0,18$.



вар 2.

ис Дано:

$$t=0;$$

$$h, B, m, q, E$$

 $\tau = ?$

Решение:

① частица влетела в однородное магнитное поле:

По правилу левой руки определим направление силы Лоренца.

Частица будет двигаться равномерно по окружности:

$$\text{По II з. Ньютона: } \frac{mv^2}{R} = Bq v \sin \alpha$$

$$mv = RBq; R = \frac{mv}{Bq}$$

$$R = \frac{mv}{Bq}$$

Высшая точка — точка над центром окружности.
За некоторое τ_1 частица пролетит четверть окружности.
 $\Rightarrow$ за τ_1 $S_1 = \frac{\pi}{2} \cdot R = \frac{\pi mv}{2Bq}$

$$\tau_1 = \frac{S_1}{v} = \frac{\pi m}{2Bq}$$

② частица движется вниз в электрическом поле:

Вертикально частица движется равноускоренно:

$$ma = qE \Rightarrow a = \frac{qE}{m}$$

За τ_2 частица прошла R равноускоренно:

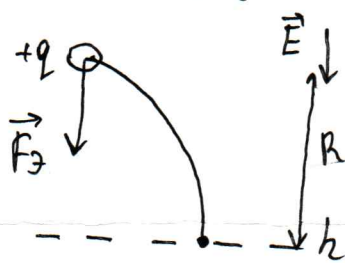
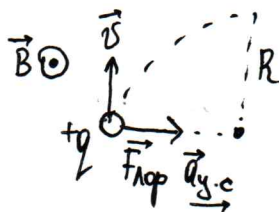
$$R = \frac{a\tau_2^2}{2} \Rightarrow \tau_2 = \sqrt{\frac{2R}{a}}$$

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{mv}{Bq}}{\frac{qE}{m}}} = \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}}$$

$$\tau = \frac{\pi m}{2Bq} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}}$$

$$\text{Ответ: } \tau = \frac{\pi m}{2Bq} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2v}{BE}}$$

163-11-114



11-04-527

Вар. 2.

№8 Дано:

$$D_p = -5 \text{ гнр}$$

$$d_1 = 6 \text{ см}$$

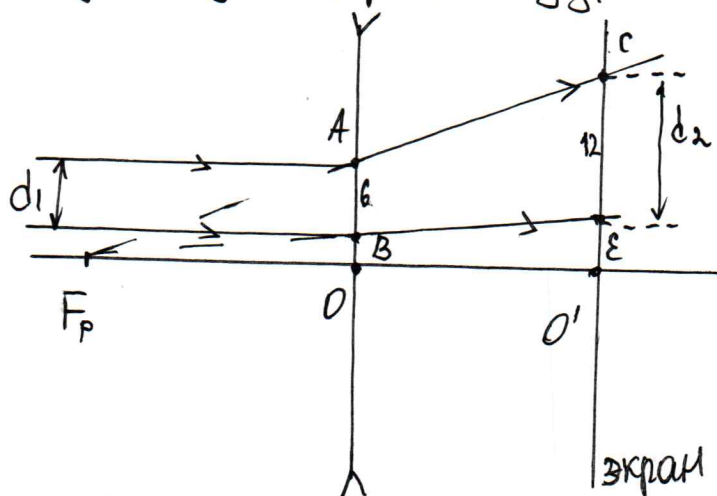
$$d_2 = 12 \text{ см}$$

$$D_c = ?$$

Решение:

163-11-114

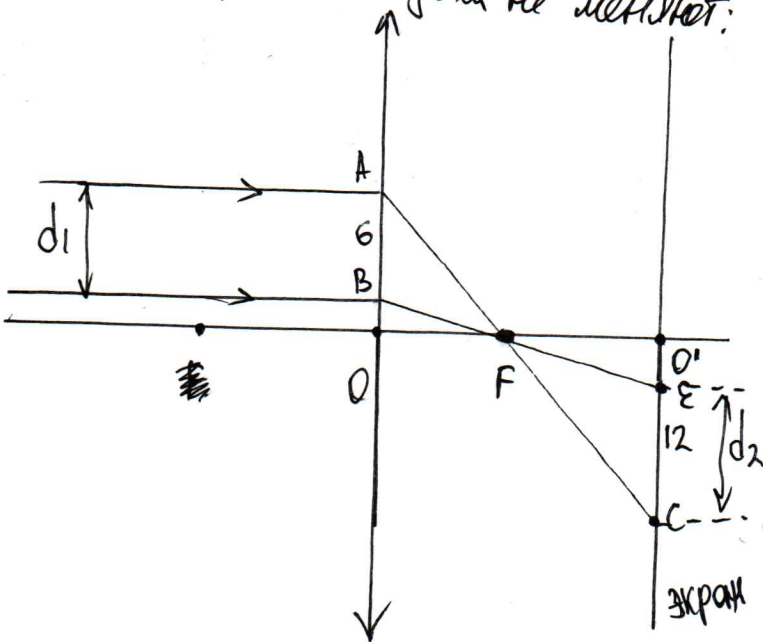
1) Лучок падает на расщ. линзу:



$$|F_p| = \frac{1}{|D_p|} = \frac{1}{5 \text{ гнр}} = \frac{1}{5} \text{ м} = 20 \text{ см} = FO.$$

$$\text{Из } \triangle FAB \sim \triangle FCE: \frac{AB}{CE} = \frac{FO}{FO'} \Rightarrow \frac{6}{12} = \frac{20}{FO'} \Rightarrow FO' = 40 \text{ см} \Rightarrow OO' = 20 \text{ см}.$$

Положение экран и лучка не меняют:

Лучок $OF = F_c$. Тогда $FO' = OO' - OF = 20 - F_c$ Из $\triangle ABF \sim \triangle CEF$:

$$\frac{AB}{CE} = \frac{OF}{FO'}; \quad \frac{6}{12} = \frac{F_c}{20 - F_c}$$

$$20 - F_c = 2F_c$$

$$3F_c = 20$$

$$F_c = \frac{20}{3} \text{ см} = \frac{20 \cdot 10^{-2}}{3} \text{ м}$$

$$D_c = \frac{1}{F_c} = \frac{3}{20 \cdot 10^{-2} \text{ м}} = \frac{300}{20} \text{ гнр} = 15 \text{ гнр}$$

Ответ: $D_c = 15 \text{ гнр}$.

$$N1. \quad 7\sqrt{2-\log_3 x} - 3|2\log_3 x - 5| \leq 7\log_3 x - 3|2\sqrt{2-\log_3 x} - 5|.$$

$$7\sqrt{2-\log_3 x} + 3|2\sqrt{2-\log_3 x} - 5| \leq 7\log_3 x + 3|2\log_3 x - 5|$$

Введем $f(t) = 7t + 3|2t - 5|$.

Заметим, что наше неравенство преобразуется в кер-во вида: $f(\sqrt{2-\log_3 x}) \leq f(\log_3 x)$.
Иследуем $f(t)$: при $t \geq \frac{5}{2}$: $f(t) = 7t + 3(2t - 5) = 7t + 6t - 15 = 13t - 15$ - возр. лин. ф-ция.

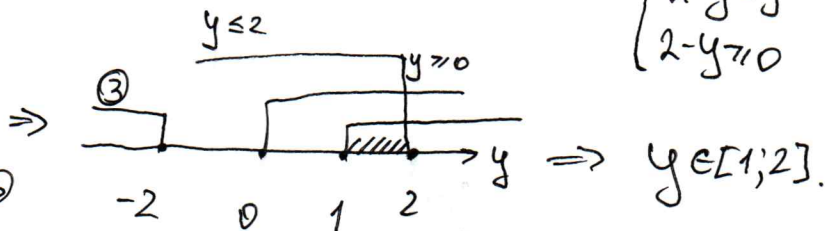
При $t < \frac{5}{2}$: $f(t) = 7t - 3(2t - 5) = 7t - 6t + 15 = t + 15$ - возр. лин. ф-ция.
Видим, что $f(t)$ - возрастает на всей области определения $\rightarrow f(a) \leq f(b)$
 $\uparrow$
 $a \leq b$.

$$\sqrt{2-\log_3 x} \leq \log_3 x. \quad \square \quad y = \log_3 x: \quad \sqrt{2-y} \leq y.$$

При $y < 0$ кер-во не имеет решений.
При $y \geq 0$:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ 2-y \leq y^2 \\ 2-y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 2 \\ y^2 + y - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 2 \\ (y+1)(y-2) \geq 0 \end{cases} \textcircled{3}$$



$$\begin{cases} \log_3 x \geq 1 \\ \log_3 x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 9 \end{cases} \Rightarrow x \in [3; 9]$$

Ответ: $x \in [3; 9]$.