

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

11-14-469

шифр 63-14-233

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	9	13	4	2	10	10	15	5	68

Вариант 2

N: 1

$$4\sqrt{2 - \log_3 x} - 3|2\log_3 x - 5| \leq 4\log_3 x - 3|2\sqrt{2 - \log_3 x} - 5|$$

$$4\sqrt{2 - \log_3 x} + 3|2\sqrt{2 - \log_3 x} - 5| \leq 4\log_3 x + 3|2\log_3 x - 5|$$

Можно заметить, что обе части неравенства можно задать некоторой функцией $g(t) = 4t + 3|2t - 5|$

$$g(t) = \begin{cases} 13t - 15 & \text{при } t \geq 2.5 \\ t + 15 & \text{при } t < 2.5 \end{cases}$$

Обе части функции монотонно возрастают, значит и сама $g(t)$ всегда растёт.

$$\begin{cases} g(\sqrt{2 - \log_3 x}) \leq g(\log_3 x) \\ x > 0 \\ \log_3 x \leq 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Задача сводится к решению системы:

$$\begin{cases} \sqrt{2 - \log_3 x} \leq \log_3 x \\ x > 0 \\ x \leq 9 \\ \log_3 x \geq 0 \end{cases}$$

$$\log_3 x \geq \sqrt{2 - \log_3 x}$$

$$\log_3^2 x + \log_3 x - 2 \geq 0$$

$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x \leq -2 \\ \log_3 x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \leq 9 \\ \log_3 x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 9 \end{cases}$$

Ответ: $x \in [3; 9]$

N:3

$$f(x) = ax^2 + (3a+1)x + b$$

$$f(x) \geq 0$$

Найти: $(4a+b)_{\min}$ -?

т.к. $f(x)$ всегда ≥ 0 , то $a > 0; D \leq 0$

$$D = (3a+1)^2 - 4ab$$

нет ответа

Пусть искомым $4a+b = y$. Тогда:

$$b = y - 4a$$

$$D = (3a+1)^2 - 4a(y-4a)$$

$$9a^2 + 6a + 1 - 4ay + 16a^2 \leq 0$$

$$25a^2 + 6a + 1 - 4ay \leq 0$$

$25a^2 + a(6-4y) + 1 \leq 0$ - в параболу, ветви вверх, значит для значений $D \leq 0$ $D' \geq 0$

$$D' = (6-4y)^2 - 100$$

$$36 - 48y + 16y^2 - 100 \geq 0$$

$$y^2 - 3y - 4 \geq 0$$

$$\begin{cases} y \leq -1 \\ y \geq 4 \end{cases}$$

минимум y ,

а не D

Если $y \in (-\infty; -1]$, то $-b = 4a + 1$, т.к. $a > 0$, то $b < 0$.

Однако, при $a > 0; b < 0$ дискриминант начального уравнения всегда > 0 , что не подходит под условие. Тогда $y \in [4; +\infty)$

Ответ: наименьшее $4a+b = 4$



почему граница?



N: 2

$$a = 6$$

$$b = 14$$

11-14-469

63-11-233

Ш - серый цвет.

С - серый

Б - белый

Ч - черный



У квадрата будет 2 типа окраски, который отличаются пометками Серого цвета (либо пометка диагональ, либо так)

Другие две клетки разделяют 2 типа на 4 подтипа (ББ; БЧ; ЧБ; ЧЧ)

Всего

$$P(C) = \frac{1}{3}; P(B|C) = \frac{2}{3}$$

Таким образом получается, что вероятность получить подпорядоченный квадрат $P(K) = (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}) + (\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}) = \frac{2^2}{3^4}$

Прямоугольник с $a = 6; b = 14$ вмещает в себя 21 такой квадрат и всё также может быть 2-ух типов по окраске в серый цвет. Таким образом получается, что иско-

$$P = \left(\frac{2^2}{3^4}\right)^{21} \cdot 2 = \frac{2^{43}}{3^{84}}$$

Ответ: $\frac{2^{43}}{3^{84}}$

N: 4

$$a = 4$$

$$b = 8$$

$$c = 13$$

Вспомогательная факта, что при проведении диагональ в прямоугольнике со сторонами x, y , мы затронем N клеток, где $N = x + y - \text{НОД}(x, y)$



Если попробовать применить этот факт на кубе с $a = 2$, то $N = 3a - 3 \text{НОД}(a, a) = 0$. Очевидно, что линия была протянута из 2 кубика.

Если применить этот факт на прямоугол. паралле-пипеде $3 \times 1 \times 1$, то $N = 3 + 1 + 1 - 2 \text{НОД}(3, 1) - \text{НОД}(1, 1) = 2$, хотя очевидно, что $N = 3$. Можно заметить, что решение

N отличалось от N , вычисленного по формуле, на $\text{НОД}(a, b; c)$.

$$\text{Тогда } N = a + b + c - \text{НОД}(a, b) - \text{НОД}(b, c) - \text{НОД}(a, c) + \text{НОД}(a, b, c)$$

$$N = 4 + 8 + 13 - 1 - 1 - 1 + 1 = 26 \text{ Ответ: } 26$$

Дано:

$$U_0 = 420 \text{ В}$$

$$R_1 = 20 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 10 \text{ Ом}$$

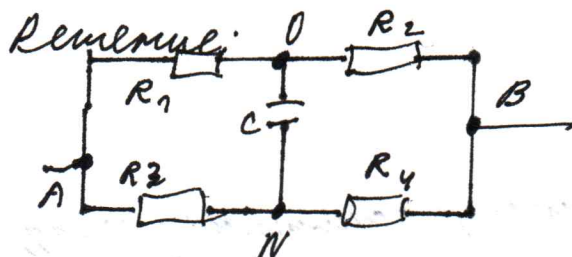
$$R_3 = 40 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 30 \text{ Ом}$$

$$C = 500 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

Найти:

$$Q_C = ?$$



N°6

Решение:

$$Q_C = C U_C$$

Т. к. протекать длительный ток
времени, то конденсатор полностью зарядится,
а значит ток через него не идет.

Тогда можно рассмотреть участки
AOB и ANB как параллельные. соприкоснувшись

$$R_{AOB} = R_1 + R_2 \quad I_{AOB} = \frac{U_0}{R_{AOB}} = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{420}{20 + 10} = 14 \text{ А}$$

$$R_{ANB} = R_3 + R_4 \quad I_{ANB} = \frac{U_0}{R_{ANB}} = \frac{U_0}{R_3 + R_4} = \frac{420}{40 + 30} = 6 \text{ А}$$

$$(\varphi_A - \varphi_0) = U_1 = I_{AOB} \cdot R_1 = 14 \cdot 20 = 280 \text{ В}$$

$$(\varphi_A - \varphi_N) = U_2 = I_{ANB} \cdot R_3 = 40 \cdot 6 = 240 \text{ В}$$

Напряжение на конденсаторе $U_C = (\varphi_0 - \varphi_N)$

$$\varphi_0 = (U_1 - \varphi_A)$$

$$\varphi_N = (U_2 - \varphi_A)$$

$$U_C = (\varphi_0 - \varphi_N) = (U_1 - U_2) = 280 - 240 = 40 \text{ В}$$

$$Q_C = C \cdot U_C = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$$

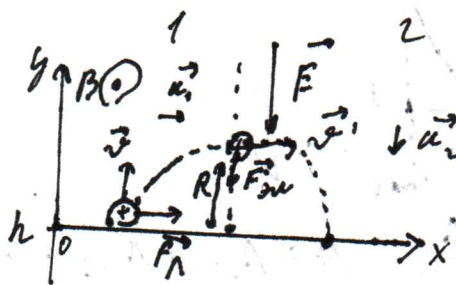
Ответ: 20 мКл



N:5

11-14-469
63-11-233

Дано:
 $t_0 = 0$
 $m;$
 $q;$
 $R; h$
 $t = ?$



$$t = t_0 + t_1 + t_2$$

$$F_1 = m a_1$$

$$F_2 = m a_2$$

$$a_1 = \frac{v^2}{R}$$

$$F_2 = E q$$

$$F_1 = B q v \sin \alpha$$

$$a_2 = \frac{E q}{m}$$

$$B q v = \frac{v^2 m}{R} \Rightarrow B q = \frac{v m}{R}$$

$$B q = \frac{v m}{R} \Rightarrow R = \frac{v m}{B q}$$

Т. к. частица прошла четверть окружности, то $t_1 = \frac{T}{4}$

$$T = \frac{2\pi}{B q} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2 B q}$$

Т. к. частица оказалась на высоте $(h + R)$, то $S_2 = R$

$$S_2 = R = \frac{a_2 t_2^2}{2}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 R m}{E q}} = \sqrt{\frac{2 v}{B}} \cdot \frac{m}{q}$$

$$t = \frac{\pi}{2 B q} + \frac{m}{q} \sqrt{\frac{2 v}{B}}, \quad v = ?$$

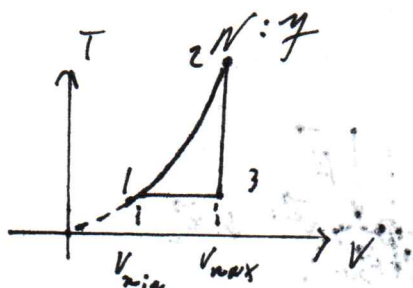
Дано:

$$T = kV^2$$

$$V_{\max} = 3V_{\min}$$

$$A_{12} = 3,64 \cdot A_{31}$$

$\eta = ?$

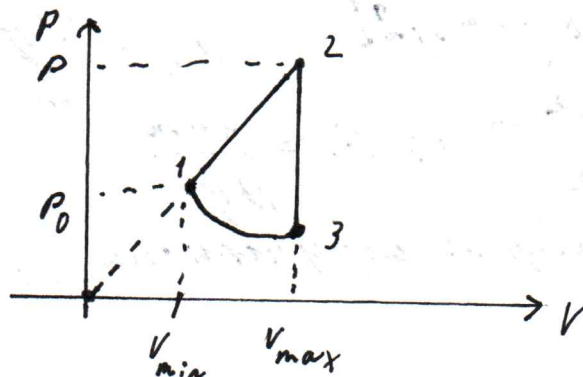


$$\eta = \frac{A}{Q_H}, \quad A = A_{12} + A_{23} + A_{31}, \quad Q_H = Q_{12}$$

$$PV = \int R T = \int R T k V^2$$

$P = \int R T V = ?$ $P(V)$ — линейная зависимость.

Построим график в координатах PV :



2-3 — изохора $\Rightarrow A_{23} = 0$

3-1 — изотерма.

$$A_{12} = \frac{(V_{\max} - V_{\min}) \cdot (P - P_0)}{2}$$

Пусть $V_{\min} = V_0$, тогда

$$A_{12} = \frac{(3V_0 - V_0) \cdot (P - P_0)}{2}$$

, т. к. на 1-2 $P = \int R k V$, то

$$A_{12} = \frac{2V_0 \cdot (3P - P_0)}{2} = 2P_0V_0$$

$$A_{31} = -4,28 P_0V_0$$

$$-5,28 P_0V_0$$

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31} = 2,64 P_0V_0$$

$$A_{31} = \frac{2P_0V_0}{3,64} = -\frac{P_0V_0}{1,82}$$

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31} = 2P_0V_0 - \frac{P_0V_0}{1,82} = \frac{2,64 P_0V_0}{1,82}$$

$$Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12}; \quad \Delta U_{12} = \frac{3}{2} \int R (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} \int R k (V_2^2 - V_1^2) = 12 \int R k V_0^2 = 12 P_0V_0$$

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{2,64 P_0V_0}{1,82 - 12 P_0V_0} = \frac{2,64}{11,84} \approx 13\% \quad \text{Ответ: } 13\% \text{ (при } i=3)$$

$N: 8$

Дано:

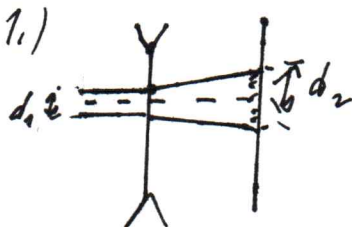
$$D_p = -5 D n T P$$

$$d_1 = 6 \text{ см}$$

$$d_2 = 12 \text{ см}$$

$D_0 = ?$

1.)



2.)

