



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

11-13-469

шифр 63-11-232

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	8	13	1	4	10	10	15	15	76

Вариант 1

① $9\sqrt{2-\log_2 x} - 2|4\log_2 x - 7| \leq 9\log_2 x - 2|4\sqrt{2-\log_2 x} - 7|$

$$9\sqrt{2-\log_2 x} + 2|4\sqrt{2-\log_2 x} - 7| \leq 9\log_2 x + 2|4\log_2 x - 7|$$

1) Заметим, что слева и справа в неравенстве функции имеют один вид: $f(x) = 9x + 2|4x - 7|$ DD3

Получим:

$$f(\sqrt{2-\log_2 x}) \leq f(\log_2 x)$$

2) рассмотрим $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 9x + 8x - 14, & 4x - 7 \geq 0 \\ 9x - 8x + 14, & 4x - 7 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 17x - 14, & x \geq \frac{7}{4} \\ x + 14, & x < \frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{функция монотонно} \\ \text{возрастает на } \mathbb{R} \text{ и непрерывная}$$

$$f(\sqrt{2-\log_2 x}) \leq f(\log_2 x) \Leftrightarrow \sqrt{2-\log_2 x} \leq \log_2 x$$

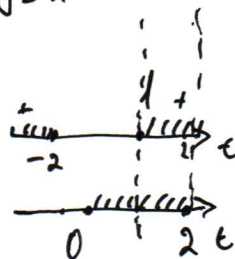
3) Решением неравенства является: $\sqrt{2-\log_2 x} \leq \log_2 x$

Пусть $\log_2 x = t$

$$\begin{cases} \sqrt{2-t} \leq t \\ 2-t \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2-t \leq t^2 \\ 2 \geq t \\ 0 \leq t \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t+2)(t-1) \geq 0 \\ 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$



$$1 \leq t \leq 2$$

$$1 \leq \log_2 x \leq 2$$

$$\underline{\underline{2 \leq x \leq 4}}$$

Ответ: $x \in [2; 4]$

② Дано:

прямоугольник 8×12 (клетчатый)

3 краски: белая, серая, чёрная

Решение:

Рассмотрим прямоугольник размерами 2×2 :



1) Если левую верхнюю клетку можно раскрасить тремя цветами: белым (Б), серым (С), чёрным (Ч)

Если в левой клетке (верхней) Б:



то соседние клетки можно раскрасить только серым (по условию), а правую нижнюю: Б или Ч

2) если в левой верхней клетке Ч: то аналогично с белым цветом; соседние - серые, правая нижняя клетка: Б Ч

Рассмотрим случай 1:



$$P_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3^4}$$

$$P(Б) = \frac{1}{3} = P(Ч) = P(С)$$

$$P(Б \text{ или } Ч) = \frac{2}{3}$$

3) случай 2: если левая верхняя клетка - серая, то:



$$P_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2^2}{3^4}$$



4) Аналогично с клетками прямоугольника 8×12 :

~~судя из~~ Заметим, что количество бело-чёрных клеток равно $\frac{8 \cdot 12}{2}$, всего клеток: $8 \cdot 12$

Для случая 1: $P'_1 = \frac{2^{\frac{8 \cdot 12}{2}}}{3^{8 \cdot 12}}$

Для случая 2: $P'_2 = \frac{2^{\frac{8 \cdot 12}{2}}}{3^{8 \cdot 12}}$

5) Искомая вероятность:

$$P'_{12} = P'_1 + P'_2 = \frac{2^{\frac{4 \cdot 12}{2}}}{3^{\frac{8 \cdot 12}{2}}} + \frac{2^{\frac{4 \cdot 12}{2}}}{3^{\frac{8 \cdot 12}{2}}} = \frac{2^{\frac{4 \cdot 12}{2}}}{3^{\frac{8 \cdot 12}{2}}} \cdot 2$$

$$P'_{12} = 2 \cdot \frac{2^{48}}{3^{96}}$$

Ответ: $2 \cdot \frac{2^{48}}{3^{96}}$

③ Дано: $f(x) = ax^2 + (a+1)x + b$



$f(x) \geq 0$ для любого x

Найти: наименьшее значение $2a+b+1$

Решение: 1) Рассмотрим $f(x)$:

$f(x)$ - квадратичная функция

При $a=0$: $f(x) = x+b$ - линейная ф-ция

Пон. как $f(x) \geq 0$, то:

$f(x)$ - парабола ветвью вверх $\Rightarrow$

$\Rightarrow a > 0$ ($a=0$ не угод. усл.)

2) $f(x) = ax^2 + (a+1)x + b$

$D = (a+1)^2 - 4ab \geq 0$

3) Пусть $2a+b+1 = y$
 $b = y - 2a - 1$

Подставим в D :

$(a+1)^2 - 4a(y - 2a - 1) \geq 0$

$a^2 + 2a + 1 - 4ay + 8a^2 + 4a \geq 0$

$9a^2 + 6a + 1 - 4ay \geq 0$

$(3a+1)^2 - 4ay \geq 0$

Выразим y :

$4ay \leq (3a+1)^2$

$y \leq \frac{(3a+1)^2}{4a}$



$f'(a) = \frac{3 \cdot 2 \cdot (3a+1) \cdot 4a - 4 \cdot (3a+1)^2}{4a^2} = \frac{18a^2 + 6a - 9a^2 - 6a - 1}{4a^2}$

$f'(a) = 0 = \frac{9a^2 - 1}{4a^2}$

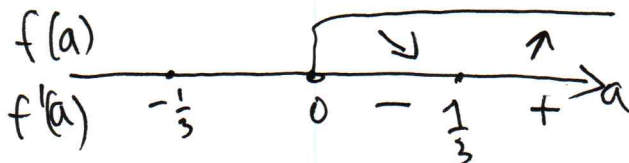
$f(a) = \frac{(3a-1)(3a+1)}{4a^2} = 0$

извл. кор.: $a = \frac{1}{3}$; $a = -\frac{1}{3}$

извл. знак.: $a = 0$

(.) $\frac{1}{3}$ - (.) min $f(a)$

5) $f(\frac{1}{3}) = \frac{(3 \cdot \frac{1}{3} + 1)^2}{4 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2^2}{\frac{4}{3}} = \frac{3 \cdot 4}{4} = 3$



Ответ: 3.

6) Дано:

$$C = 200 \text{ мкФ} = 200 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$$

$$R_1 = 10 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 20 \text{ Ом}$$

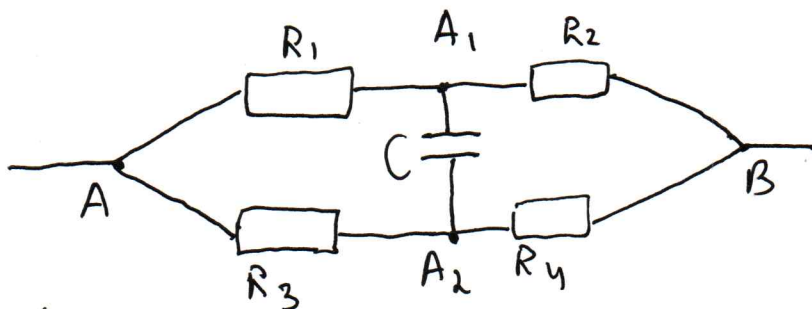
$$R_3 = 30 \text{ Ом}$$

$$R_4 = 40 \text{ Ом}$$

$$U_0 = 210 \text{ В}$$

$$q = ? \text{ Кл}$$

Решение:



Через гальванично соединенные ветви после подключения источника напряжения конденсатор полностью зарядится и ток через него течь не будет.

$$1) U_{12} = U_{34} = U_0 \text{ (параллельное соединение)}$$

$$\left. \begin{array}{l} I_{12} = I_1 = I_2 \\ U_{34} = I_{34} = I_3 = I_4 \end{array} \right\} \text{ (последовательное соединение)}$$

$$I_{12} = \frac{U_0}{R_{12}} ; R_{12} = R_1 + R_2$$

$$I_{12} = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{210}{10 + 20} = 7 \text{ А} = I_1 = I_2$$

$$I_{34} = \frac{U_0}{R_{34}} ; R_{34} = R_3 + R_4 = I_3 = I_4$$

$$I_{34} = \frac{210}{30 + 40} = 3 \text{ А}$$

$$2) U_C = U_{A1} - U_{A2}$$

$$U_1 = U_A - U_{A1} = I_1 \cdot R_1 \quad (1)$$

$$U_3 = U_A - U_{A2} = I_3 \cdot R_3 \quad (2)$$

вычтем из (2) - (1):

$$U_A - U_{A2} - U_A + U_{A1} = I_3 R_3 - I_1 R_1$$

$$U_{A1} - U_{A2} = I_3 R_3 - I_1 R_1 = U_C$$

$$U_C = 3 \cdot 30 - 7 \cdot 10 = 20 \text{ В}$$

$$3) C = \frac{q}{U_C} \Rightarrow q = C \cdot U_C = 200 \cdot 10^{-6} \cdot 20 =$$

$$= 2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} = 2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}$$

$$\text{Ответ: } q = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Кл.}$$



8) Дано:

$$D_p = -4 \text{ ДПТР}$$

$$d_1 = 5 \text{ см}$$

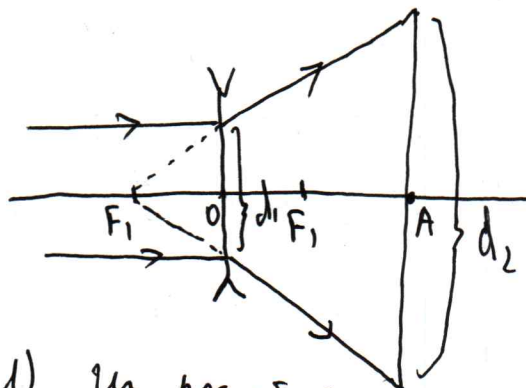
$$d_2 = 20 \text{ см}$$

$$D_c = ? \text{ ДПТР}$$

Решение:

для рассматриваемой линзы:

63-11-232



1) Из подобия треугольников:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{|F_1|}{|F_1| + OA}$$

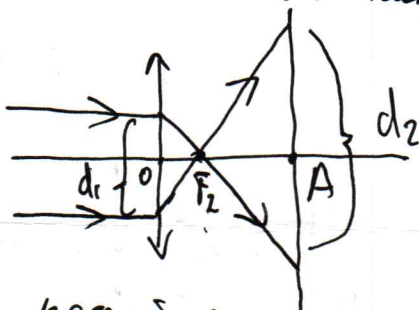
$$F_1 = \frac{1}{D} = -\frac{1}{4} \text{ м} = -25 \text{ см}$$

$$\frac{5}{20} = \frac{|F_1|}{|F_1| + OA}$$

$$|F_1| + OA = 4|F_1|$$

$$OA = 3|F_1| = 3 \cdot 25 = 75$$

2) Для собирающей линзы:



$$OA = 75 \text{ см} = 0,75 \text{ м}$$

Из подобия треугольников:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{OA - F_2} ; \frac{5}{20} = \frac{F_2}{OA - F_2}$$

$$OA - F_2 = 4F_2$$

$$OA = 5F_2 \Rightarrow F_2 = \frac{1}{5} OA = 0,15$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 0,75 = 0,15 \text{ м}$$

$$D_c = \frac{1}{F_2}$$

$$D_c = \frac{1}{0,15} = \frac{1 \cdot 100}{15} = \frac{20}{3} \approx 6,67 \text{ ДПТР}$$

Ответ: 6,67 ДПТР

⑦ Дано:

$$T = kV^2$$

$$A_{12} = 2,16 A_{31}$$

$$\frac{V_3}{V_1} = 2$$

$$\eta = ? \%$$

Решение:

Нанесем график T-V:

1) процесс 3-1; изотермический

По закону Бойля-Мариотта:

$$P_3 V_3 = P_1 V_1$$

$$P_1 = 2 P_3 \Rightarrow P_3 = \frac{P_0}{2}$$

2) процесс 1-2:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

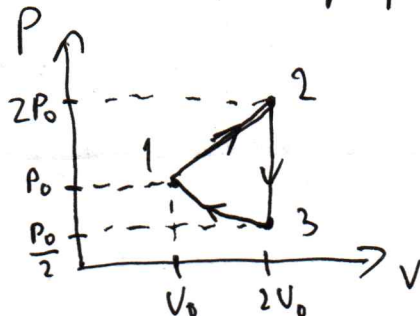
$$T_1 = k V_1^2$$

$$T_2 = k V_2^2 = k \cdot 4 V_1^2$$

$$\frac{P_1 \cdot V_1}{k \cdot V_1^2} = \frac{2 P_2 \cdot V_1}{4 k V_1^2} \Rightarrow P_2 = 2 P_1$$

$$P_2 = 2 P_0$$

Построим график в виде PV:



$$\eta = 1 - \frac{|Q_{\text{х}}|}{Q_{\text{н}}}$$

$$Q_{\text{н}} = Q_{12}$$

$$Q_{\text{х}} = Q_{23} + Q_{31}$$

$$u = \frac{3}{2} \int RT$$

$$A = \int PV$$

$$Q_{\text{н}} = Q_{12} = \Delta u_{12} + A_{12} = \frac{3}{2} \cdot \int R(T_2 - T_1) + A_{12}$$

$$A_{12} = \frac{3}{2} P_0 V_0$$

$$\text{т.к. } PV = \int RT \Rightarrow u = \frac{3}{2} PV$$

$$Q_{12} = \frac{9}{2} P_0 V_0 + A_{12} = 4 A_{12} = 4 \cdot 2,16 A_{31}$$

$$|Q_{\text{х}}| = Q_{31} + Q_{23} = \Delta u_{31} + A_{31} + \Delta u_{23} + A_{23}$$

$$|Q_{\text{х}}| = \frac{9}{2} P_0 V_0 + A_{31} = 3 \cdot A_{12} + A_{31} = 3 \cdot 2,16 A_{31} + A_{31}$$

$$\eta = 1 - \frac{|A_{31}| (3 \cdot 2,16 + 1)}{A_{31} \cdot 4 \cdot 2,16} = 1 - \frac{7,48}{8,64} \approx 0,133$$

$$\eta = 13,3 \%$$

$$\text{Ответ: } 13,3 \%$$

4

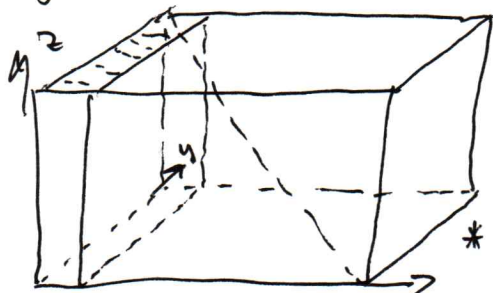
Дано:

прямоу. параллелепед $6 \times 7 \times 11$

11-13-469

63-11-232

Решение:



Всего получилось: $6 \cdot 7 \cdot 11$ кубиков

Сколько раз пересекает диагональ

кубики: $6 + 7 + 11$.

* Док-во:

Диагональ задается уравнением: $\frac{x}{6} = \frac{y}{7} = \frac{z}{11}$

Выведем уравнение координат

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{7} = \frac{z}{11}$$

1) кубики имеют целочисленные координаты в своих вершинах

По оси x диагональ пересекает 6 плоскостей

(если разрезать параллелепед по клеткам x (сегменты ^{интервалов} ^{валов}))

по оси y диагональ $\cap$ 7 плоскостей

по оси z диагональ $\cap$ 11 плоскостей

2) Возможны случаи, когда диагональ за 1 раз пересекает несколько кубиков (если у кубиков общая точка)

количество таких случаев $= \text{НОД}(x; y) + \text{НОД}(x; z) + \text{НОД}(z; y) - \text{НОД}(x; y; z)$

3) Итого получится: $6 + 7 + 11 - \text{НОД}(6; 7) - \text{НОД}(6; 11) - \text{НОД}(7; 11) + \text{НОД}(6; 7; 11) = 24 - 1 - 1 - 1 + 1 = 22$

7

$\text{НОД}(x; y; z)$

где НОД ,
то есть общее количество
общих точек у
трех кубиков.

Ответ: 22,



5) Дано:

m, q

$t_0 = 0$

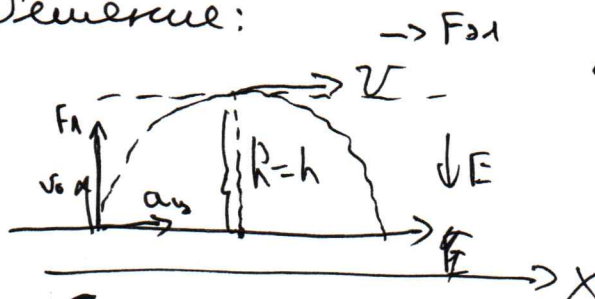
h

B

$E, \alpha = 90^\circ$

$\tau = ?$

Решение:



$$\tau = t_1 + t_2$$

$$1) F_{\alpha 1} = m a_{\alpha 1}$$

$$F_{\alpha 1} = Bq v \sin \alpha$$

$$a_{\alpha 1} = \frac{v^2}{R}$$

$$m a_{\alpha 1} = Bq v$$

$$\frac{m v}{R} = Bq v \Rightarrow R = \frac{m v}{Bq} = h$$

Так как радиус гравитации по траектории

окружности, то она соответствует максимальной точке высоты на поверхности периода. $t_1 = \frac{T}{4}$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m v}{Bq v}$$

$$t_1 = \frac{\pi m}{2Bq}$$

2) частица влетела в эл. поле:

м/д. проекция скорости v_x направлена по оси x , то $a =$

$$F_{\alpha 1} = Eq$$

$$h = \frac{a t_2^2}{2} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_{\alpha 1}}{m} = \frac{Eq}{m}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h \cdot m}{Eq}}$$

$$\tau = t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{2Bq} + \sqrt{\frac{2hm}{Eq}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi m}{2Bq} + \sqrt{\frac{2hm}{Eq}}$$