

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

11-12-469

шифр 63-11-231

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	8	13	9	3	5	10	15	15	78

Вариант 2

№1

Дано:

$$7\sqrt{2-\log_3 x} - 3|2\log_3 x - 5| \leq 7\log_3 x - 3|2\sqrt{2-\log_3 x} - 5|$$

Решение:

$$1) 7\sqrt{2-\log_3 x} + 3|2\sqrt{2-\log_3 x} - 5| \leq 7\log_3 x + 3|\log_3 x - 5|$$

2) Заметим, что и левую и правую части неравенства можно представить в виде функции $g(a) = 7a + 3|2a - 5|$, тогда получаем следующее неравенство: $g(\sqrt{2-\log_3 x}) \leq g(\log_3 x)$

$$3) g(a) = \begin{cases} 7a + 6a - 5, & \text{если } a \geq \frac{5}{2} \\ 7a - 6a + 5, & \text{если } a < \frac{5}{2} \end{cases} \quad g(a) = \begin{cases} 13a - 5, & a \geq \frac{5}{2} \\ a + 5, & a < \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow g(a) - \text{непрерывная}$$

возрастающая функция
ломаной. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ аргументы функций в неравенстве: $g(\sqrt{2-\log_3 x}) \leq g(\log_3 x)$ можно ~~уменьшать~~.
Сравнивать так же как и функцию.

$$4) \sqrt{2-\log_3 x} \leq \log_3 x. \text{ Замена: } \log_3 x = t.$$

$$\sqrt{2-t} \leq t.$$

$$\begin{cases} t \leq 2 \\ t \geq 0 \\ t^2 + t - 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$t \geq 0$$

$$t^2 + t - 2 \geq 0$$

$$t \in [-2, 1]$$

$$t \in [0, 2]$$

$$t \in [0, 2]$$

$$t \in [0, 2]$$

$$t \in [0, 2]$$

$$t \in [0, 2]$$

$$t \in [0, 2]$$

$$t \in [0, 2]$$

$$t \in [0, 2]$$

$$t \in [0, 2]$$

$$t \in [0, 2]$$

$$t \in [0, 2]$$

$$t \in [0, 2]$$

$$t \in [0, 2]$$

$$5) \begin{cases} \log_3 x \geq 1 \\ \log_3 x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 9 \end{cases} \Rightarrow x \in [3, 9]$$

Ответ: $x \in [3, 9]$

№2.

Рассмотрю два случая:

1) Случай 1.

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1

Пусть 1-я клетка ~~затрачена~~ ~~закрашивается~~ ~~серым~~. В результате левая верхняя клетка является серой. Тогда 2-я клетка либо белого цвета либо черного цвета. ~~Т.е.~~

2) Т.О. ~~затрачена~~ ~~закрашивается~~ ~~серым~~ строка совсем удовлетворена из текста задачи будет равна произведению всех цифр в строке. 2-я ~~затрачена~~ ~~закрашивается~~ ~~серым~~ - кол-во вариантов

Закрашивание одной строки возможно условие. $\Rightarrow$ ~~уменьшить~~ ~~интервал~~
 Возведя это число в степень n - количество строк, ~~получим~~ получим кон-во
 вариантов закрашивания всего прямоугольника в n (удв. усл. задачи).
 $(2^7)^6 = 2^{42}$ - удв варианты в сл 1.

Случай 2.

3) Пусть левая верхняя клетка окрашена либо в черный либо в белый.
 Т.О. получили прямоугольник закрашенный цифрами симметрично к
 прямоугольнику из ~~сл~~ сл 1.

2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2

4) ~~Вс~~ Количество вариантов закрашивания
 прямоугольника в сл 2 равно 2^{42}

5) В слухи сигнал вариантов удв услуго
 задачи будет $2^{42} + 2^{42} = 2^{43}$

6) Всего вариантов закрашивания ~~пол~~ прямоугольника $3^{8 \cdot 14} = 3^{84}$

7) $P = \frac{m}{n}$ $m = 2^{43}$ $n = 3^{84}$ $P = \frac{2^{43}}{3^{84}}$

Ответ: $P = \frac{2^{43}}{3^{84}}$

№3. Дано:

~~$f(x) = ax^2$~~

$f(x) = ax^2 + (3a+1)x + b$

Пусть $n = 4a + b$

Найти n мин. -?

Решение:

Так как $f(x) \geq 0$ при $x \in \mathbb{R}$, ~~то~~ a $f(x)$ - ~~не~~ неразложим, то
 ее ветви направлены вверх $\Rightarrow a > 0$, ~~и~~ $f(x)$
 имеет выше осей $\mathbb{D} \leq 0$.

$ax^2 + (3a+1)x + b = 0$

$D = (3a+1)^2 - 4ab \leq 0$ $(3a+1)^2 - 4ab \leq 0$ $b = n - 4a$

$9a^2 + 6a + 1 - 4a(n - 4a) \leq 0$

$9a^2 + 6a + 1 - 4an + 16a^2 \leq 0$

$25a^2 + 6a + 1 - 4an \leq 0$

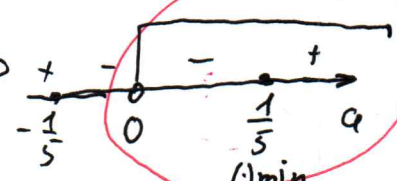
$4an \geq 25a^2 + 6a + 1$

$n \geq \frac{25a^2 + 6a + 1}{4a} \Rightarrow g(a) = \frac{25a^2 + 6a + 1}{4a}$

$g'(a) = \frac{(50a + 6) \cdot 4a - 4(25a^2 + 6a + 1)}{16a^2}$

$\frac{200a^2 + 24a - 100a^2 - 24a - 4}{16a^2} = 0$

$\begin{cases} \frac{100a^2 - 4}{16a^2} = 0 \\ a > 0 \end{cases}$



т.к. $(\cdot) a = \frac{1}{5}$ - единственная точка минимума функции $g(a) \Rightarrow n_{\min} = g_{\min} =$
 $g(\frac{1}{5}) = \frac{25 \cdot (\frac{1}{5})^2 + 6 \cdot \frac{1}{5} + 1}{4 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{16}{4} = 4$

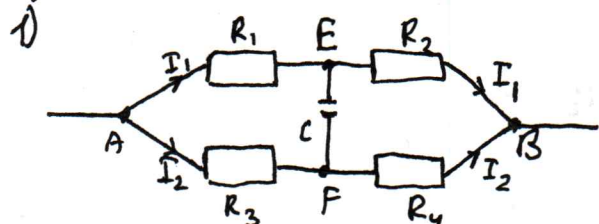
Ответ: 4

$b = ?$ по формуле



№6.
 Дано:
 $C = 500 \cdot 10^6 \text{ ф}$
 $R_1 = 20 \text{ Ом}$
 $R_2 = 10 \text{ Ом}$
 $R_3 = 40 \text{ Ом}$
 $R_4 = 30 \text{ Ом}$
 $U_0 = 420 \text{ В}$
 $q = ?$

Решение



$C = \frac{q}{U}$
 $q = CU$
 63-11-231

Участок цепи, содержащий в себе только конденсатор обозначим EF, как ^{соединяем} ~~контур~~ ~~контур~~
 2) $U_0 = U_{AB}$ $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$ $\varphi_A - \varphi_B = U_{AB} = U_0 = 420 \text{ В}$

3) $\begin{cases} \varphi_A - \varphi_E = U_{R_1} \\ \varphi_E - \varphi_B = U_{R_2} \end{cases} \Rightarrow \text{сложим ур-я почленно} \quad \varphi_A - \varphi_B = U_{R_1} + U_{R_2} \quad U_{R_1} = I_1 R_1 \quad U_{R_2} = I_1 R_2$
 $U_0 = I_1 (R_1 + R_2) \Rightarrow I_1 = \frac{U_0}{R_1 + R_2} = \frac{420}{20 + 10} = 14 \text{ А}$

4) $\begin{cases} \varphi_A - \varphi_F = U_{R_3} \\ \varphi_F - \varphi_B = U_{R_4} \end{cases} \Rightarrow \text{сложим ур-я почленно} \quad \varphi_A - \varphi_B = U_{R_3} + U_{R_4} \quad U_{R_3} = I_2 R_3 \quad U_{R_4} = I_2 R_4$
 $U_0 = I_2 (R_3 + R_4) \Rightarrow I_2 = \frac{U_0}{R_3 + R_4} = \frac{420}{40 + 30} = 6 \text{ А}$

5) $U_C = \varphi_E - \varphi_F$
 $\begin{cases} \varphi_A - \varphi_E = U_{R_1} \\ \varphi_A - \varphi_F = U_{R_3} \end{cases} \Rightarrow \text{сложим ур-я почленно} \quad \varphi_F - \varphi_E = U_{R_1} - U_{R_3} = U_C$
 $U_C = I_1 R_1 - I_2 R_3 = 14 \cdot 20 - 6 \cdot 40 = 280 - 240 = 40 \text{ В}$
 ~~$q = CU = 500 \cdot 10^6 \cdot 40 = 20 \text{ мкКл}$~~
 $q = CU = 500 \cdot 10^6 \cdot 40 = 0,02 \text{ Кл} = 20 \text{ мкКл}$

Ответ: 20 мкКл.

№4.

Дано
 $x = 7$
 $y = 8$
 $z = 13$
 $N = ?$

Решение.

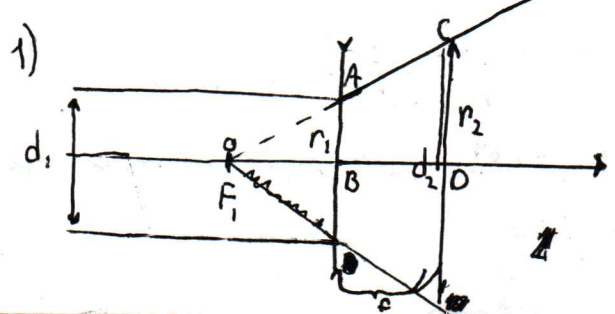
Стороны прямоугольного ~~параллелепипеда~~ параллелепипеда x, y, z
 N - кол-во кубиков.

Так как кубики одинаковые, то можно воспользоваться формулой
 $N = x + y + z + \text{НОД}(x; y; z) - \text{НОД}(x; y) - \text{НОД}(x; z) - \text{НОД}(y; z)$

$\text{НОД}(x; y; z) = \text{НОД}(7; 8; 13) = 1$
 $\text{НОД}(x; y) = \text{НОД}(7; 8) = 1$
 $\text{НОД}(x; z) = \text{НОД}(7; 13) = 1$
 $\text{НОД}(y; z) = \text{НОД}(8; 13) = 1$
 $\Rightarrow N = 7 + 8 + 13 + 1 - 1 - 1 - 1 = 26 \text{ кубиков}$

Ответ: 26 кубиков

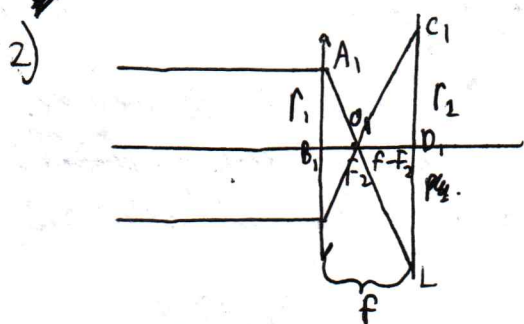
№8 Дано CU
 $P_p = 5 \text{ Вт}$
 $d_1 = 6 \text{ см} = 0,06 \text{ м}$
 $d_2 = 12 \text{ см} = 0,12 \text{ м}$
 $P_c = ?$



$r_1 = \frac{d_1}{2} = \frac{0,06}{2} = 0,03 \text{ м}$
 $r_2 = \frac{d_2}{2} = \frac{0,12}{2} = 0,06 \text{ м}$
 $\triangle OBA \sim \triangle OBC$ по двум углам
 $(\angle AOB = \angle COB, \angle OAB = \angle OCB)$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{F_1}{F_1 + f} \quad D_p = -\frac{1}{F_1} \quad F_1 = -\frac{1}{D_p} = -\frac{1}{-5} = 0,2 \mu$$

$$F_1 r_1 + f r_1 = F_1 r_2 \quad f = \frac{F_1 (r_2 - r_1)}{r_1} = \frac{0,2 \cdot (0,06 - 0,03)}{0,03} = 0,2 \mu = \text{const.}$$



2) $\Delta A_1 B_1 O_1 \sim \Delta O_1 P_1 C_1$ по двум углам ($\angle A_1 B_1 O_1 = \angle O_1 P_1 C_1 = 90^\circ$;
 $\angle A_1 O_1 B_1 = \angle C_1 O_1 P_1$ как вертикальные $\angle P_1 O_1 L = \angle P_1 O_1 C_1 = \angle A_1 O_1 B_1$)

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{F_2}{f - F_2} \quad n_1 P - F_2 r_1 = F_2 r_2 \Rightarrow F_2 = \frac{n_1 f}{r_2 + r_1} = \frac{0,03 \cdot 0,2}{0,08 + 0,03} =$$

$$= \frac{0,2 \cdot 0,03}{0,09} = \frac{0,2}{3} = \frac{1}{15} \mu.$$

$$D_c = \frac{1}{F_2} = \frac{1}{\frac{1}{15}} = 15 \text{ диоптр}$$

Ответ: 15 диоптр.

№ 7

Дано:

$$T_2 = K V^2$$

$$V_1 = V$$

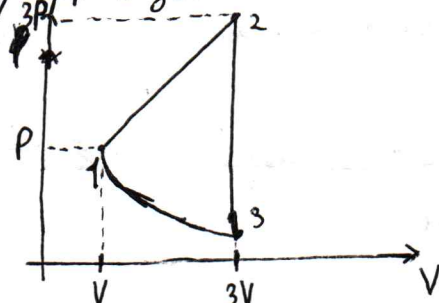
$$V_3 = V_2 = 3V$$

$$|A_{12}| = 3,64 A_{31}$$

$\eta = ?$

Решение:

1) Построим циклограмму мойки из меновой ~~ра~~ наливки для циклограммы зависимости P от V .



$$2) T_2 = K V_2^2 = 9 K V^2$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2^2}{V_1^2}$$

$$\frac{P V}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

$$P_2 = \frac{P V T_2}{V_2 T_1} = \frac{P \cdot V \cdot 9 T_1}{3 V \cdot T_1} = 3P$$

$$P_2 = 3P \quad A_{31} = \frac{|A_{12}|}{3,64}$$

A_{12} — работа насоса по процессу 1-2 на графике PV

$$3) \eta = \frac{A}{Q_H} \cdot 100\% \quad A = A_{12} + A_{23} + A_{31} = A_{12} + A_{31}$$

$$A_{12} = \frac{(P + 3P)}{2} (3V - V) = 4PV \quad Q_H = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} \quad \Delta U_{12} = \frac{3}{2} i V R (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} i V R \cdot 8T_1$$

$$A_{12} = 4PV = 4 \cdot V R T_1 \quad \Delta U_{12} = 12 i V R T_1$$

$$Q_H = 12 i V R T_1 + 4 V R T_1 = 4 V R T_1 (3i + 1) \quad A = 4 V R T_1 + \frac{4 V R T_1}{3,64} = 4 V R T_1 (1 + \frac{1}{3,64})$$

$$\eta = \frac{4 V R T_1 (1 + \frac{1}{3,64})}{4 V R T_1 (3i + 1)} \cdot 100 = \frac{2,64 \cdot 100}{3,64 (3i + 1)}$$

4) $i = 1$ для одноатомного газа

$$\eta_1 = \frac{2,64 \cdot 100}{3,64 \cdot 4} = \frac{3 \cdot 100}{182} \approx 18\%$$

5) $i = 5$ для двухатомного газа

$$\eta_2 = \frac{2,64 \cdot 100}{3,64 \cdot 16} \approx 5\%$$

6) $i = 6$ для многоатомного газа

$$\eta_3 = \frac{2,64 \cdot 100}{3,64 \cdot 19} \approx 4\%$$

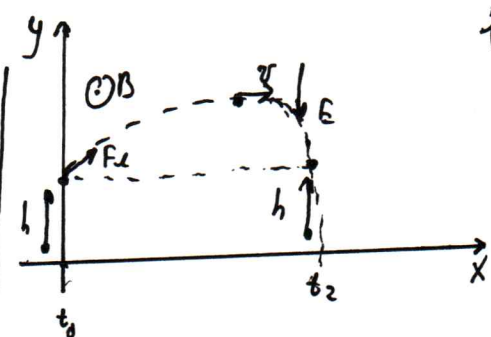
Ответ: для одноатомного газа $\eta = 18\%$; для двухатомного газа $\eta = 5\%$; для многоатомного газа $\eta = 4\%$

11-12-469



N₅

Дано:
 $t_1 = 0$
 h
 q
 B
 E
 $t_2 = ?$



1) $F_x = B q v \sin \alpha$
 $F_x = m a_{gc}$ тк. движение по окружности.
 $a_{gc} = \frac{v^2}{R}$ $F_x = \frac{m v^2}{R}$
 $\frac{m v^2}{R} = B q v$ $v = \frac{B q R}{m}$

63-11-231

2) $t = \frac{T}{4}$ $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R m}{B q R} = \frac{2\pi m}{B q}$ $t = \frac{\pi m}{2 B q}$ $\Delta t = \frac{\pi m}{2 B q}$ $a = \frac{v}{\Delta t} = \frac{B q R \cdot 2 B q}{m \cdot \pi m} = \frac{2 B^2 q^2 R}{\pi m^2}$

3) $h = a t^2 = \frac{a \pi^2 m^2}{8 B^2 q^2}$ $h = \frac{E q \pi m^2}{8 B^2 q^2 m}$

3) $h = \frac{a t^2}{2}$ $t^2 = \frac{2 h}{a}$ $F_x = a \cdot m$ $F_{zu} = E q$ $E q = m a$ $a = \frac{E q}{m}$

$t^2 = \frac{2 h m}{E q}$