

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 45-09-02

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	9	13	13	10	10	15	6	88

Вариант 1

$$\begin{cases} x^2+z = y^2+z^2+2yz \\ y^2+z = x^2+z^2+2xz \\ z^2+y = x^2+y^2+2xy \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2+y^2+z^2+y = 2(x^2+y^2+z^2) - 2(xz+yz+xy)$$

$$y = x^2+y^2+z^2+2(xz+yz+xy)$$

$$y = (x+y+z)^2$$

$x > 0; y > 0; z > 0$ т.к. решения положительные

$$\text{т.е. } z = x+y+2$$

$$z = 3-x-y$$

$$x^2+z = y^2 + (3-x-y)^2 + 2y(3-x-y)$$

$$x^2+z = y^2 + y - 6x - 6y + 2xy + x^2 + y^2 + 6y - 2xy - 2y^2$$

$$0 = 7 - 6x$$

$$x = \frac{7}{6}$$

$$y^2+z = \frac{49}{36} + (3 - \frac{7}{6} - y)^2 + 2 \cdot \frac{7}{6} (3 - \frac{7}{6} - y)$$

$$y^2+z = \frac{49}{36} + (\frac{11}{6} - y)^2 + \frac{7}{3}(\frac{11}{6} - y)$$

$$y^2+z = \frac{49}{36} + \frac{121}{36} - \frac{11}{3}y + y^2 + \frac{77}{18} - \frac{7}{3}y$$

$$z = \frac{170}{36} - \frac{14}{3}y + \frac{77}{18}$$

$$z = \frac{100}{36} - 2y$$

$$1 = \frac{100}{36} - 2y$$

$$1 = 3 - 2y$$

$$y = 1$$

$$z = 3 - \frac{7}{6} - 1 = \frac{5}{6}$$

$$x = \frac{7}{6}, y = 1, z = \frac{5}{6}$$

№3 Заметим, что многоугольник имеет хотя бы 3 вершины.

Плюс точкой количества многоугольников с точкой A:

Заметим, что мы можем выбрать или не выбрать любую точку для угла в

многоугольнике. Таким образом 2^{2023} . Но нам так не нужно выбирать.

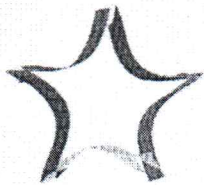
уже выбрано < 2 точек. Таким образом $1 + 2023$ (не выбирать ни одну из точек или выбрать одну)

Этот вариант с точкой A: $2^{2023} - 1 - 2023 = 2^{2023} - 2024$

(Заметим, что для любой из-за точек на окружности $(+2)$ мы можем рассмотреть

только 1-многоугольник (вершины в точках.)

Вариантов без точки A: Заметим, что любую точку мы можем выбрать или не выбрать для угла в многоугольнике. Таким образом 2^{2023} . Но нам так не нужно выбирать.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 45-09-02

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

имеется 3-х точек. Тогда количество вариантов $1+2023+C_{2023}^2 = 2024 + \frac{2023 \cdot 2022}{2} = 2023 \cdot 1011 + 2024$

Учтем варианты вырожденные без точки A: $2^{2023} - 2024 - 2023 \cdot 1011$

Разность кол-ва вариантов равна $2^{2023} - 2024 - (2^{2023} - 2024 - 2023 \cdot 1011) = 2023 \cdot 1011 = 2045253$
(т.е. невырожденных вариантов A баллов мы 2.045253)

№4 По теореме Безу $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)Q(x)$, где x_1, x_2, x_3 - корни $f(x)$
Заметим, что т.к. $f(x)$ является целым, то $Q(x)$ является целым $((x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ имеет нулевой остаток)

(т.е. $Q(x) = k$ $k \in \mathbb{R}$ k - рациональное число)

Т.к. $f(x)$ при старшем коэффициенте равно коэффициенту 1, то $Q(x) = 1$

Т.е. $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Т.к. $f(y(x))$ не имеет корней, то $y(x) - x_i$ $i \in \{1, 2, 3\} \neq 0$ т.е. дробные

выра $x^2 + 6x + 2024 - x_i$ не имеют корней. Т.е. $4b^2 - 4(a-x_i) < 0$
 $i \in \{1, 2, 3\}$
 $4(2024-x_i) < 36$
 $2024-x_i < 9$
 $x_i > 2015$

Тогда не выполняется $x_1, x_2, x_3 > 2015$

$f(2024) = (2024-x_1)(2024-x_2)(2024-x_3)$ $x_i > 2015$ $i \in \{1, 2, 3\}$

Т.е. $f(2024) > 9 \cdot 9 \cdot 9 = 81 \cdot 9 = 729 \Rightarrow f(x) > 729$ $f(2024) > 729$

№5 Заметим, что скорости шаров мы можем разложить на вертикальную и горизонтальную.



$\vec{v}$ - горизонтальная составляющая

$\vec{AC}$ - вертикальная скорость

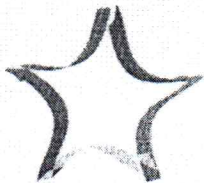
$\vec{AB}$ ($AB \parallel \vec{v}$) - горизонтальная скорость

$\vec{BC}$ ($BC \perp AB$) - вертикальная скорость

Так как $\angle CAB = 60^\circ$, то $|\vec{AB}| = \frac{40}{2} = 20$
 $\angle CBA = 30^\circ$

Т.е. горизонтальная скорость у шарика будет 20 м/с

Поскольку известно, что скорость шаров $\vec{v}$ и $\vec{BC}$ направлены в противоположные стороны шарик будет 20, а значит в высшей точке его скорость (если не было трения) была бы 20. Т.е. шарик будет двигаться по параболе, но (если шарик не будет двигаться по параболе) (от горизонтальной составляющей $\vec{v}$), шарик



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 45-09-02

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

Площаь поверхности вращения шарика в момент удара и сразу после
 $30^2 = 20^2 + x^2$ x - скорость вращения в момент удара.

$$500 = x^2$$

$$\sqrt{5} \cdot 10 = x$$

$40^2 = 20^2 + x_1^2$ x_1 - скорость вращения в момент удара.

$$1200 = x_1^2$$

$$\sqrt{12} \cdot 10 = x_1$$

Площаь поверхности, что он имеет до удара $\frac{(\sqrt{12}-\sqrt{5})10}{10}$ см, а

$\frac{(\sqrt{12}+\sqrt{5})10}{10}$ см, (здесь первый шарик - вращается по часовой стрелке, второй шарик - он вращается по часовой стрелке)

Заметим, что когда вертикальная скорость шаров станет равна по модулю горизонтальной, тогда шарик упадет. Тогда время падения шарика $\frac{2 \cdot \sqrt{12} \cdot 10}{10} = 2\sqrt{12}$ см.

Площаь до удара он в первом случае $\sqrt{12}-\sqrt{5}$ см, а после удара $\sqrt{12}+\sqrt{5}$ см, а во втором случае - до удара $\sqrt{12}+\sqrt{5}$ см, а после удара $\sqrt{12}-\sqrt{5}$ см, тогда в первом случае расстояние от точки броска до точки падения равно $|(\sqrt{12}-\sqrt{5}) \cdot 20 - (\sqrt{12}+\sqrt{5}) \cdot 20| =$
 $= |-2\sqrt{5} \cdot 20| = |-40\sqrt{5}| = 40\sqrt{5}$ м.

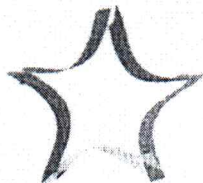
а во втором случае $|(\sqrt{12}+\sqrt{5}) \cdot 20 - (\sqrt{12}-\sqrt{5}) \cdot 20| = |2\sqrt{5} \cdot 20| = 40\sqrt{5}$ м ($40\sqrt{5} = 40\sqrt{5}$)

(вычитание т.к. после удара об шарик шарик повернулся)

№6 Заметим, что т.к. высота воды 20 см, значит, расстояние, по которому падает шарик, равно 115 см. Тогда время, что шарик падает, равно $115 \cdot 15 \cdot 4 = 1725$ с. Тогда заметим, что шарик падает, когда шарик падает, а вода была тоже 1725 с (вместо 15 см шарик). Тогда x - высота шарика. Тогда $15 \cdot x \cdot 0,9 + 15 \cdot (120 - x) \cdot 7 = 1725$
т.е. высота шарика была 50 см, тогда шарик был 15 см, а масса шарика $15 \cdot 50 \cdot 0,9 = 675$ г, а масса воды $1725 - 675 = 1050$ г.

$$\begin{aligned} 15 \cdot x \cdot 0,9 + 15 \cdot (120 - x) \cdot 7 &= 1725 \\ 13,5x + 1800 - 105x &= 1725 \\ 1800 - 91,5x &= 1725 \\ 75 - 91,5x &= 0 \\ 750 - 915x &= 0 \\ 50 - x &= 0 \end{aligned}$$

$$x = 50$$



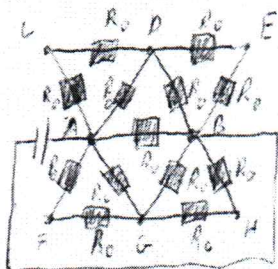
Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 45-09-02

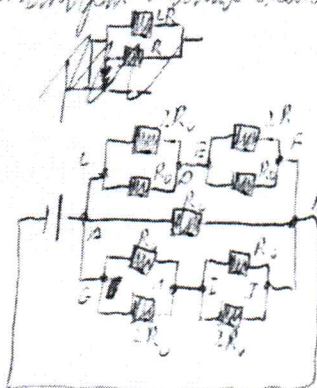
Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

У7 Заменим 12 резисторов на управляемые резисторы, учитывая сопротивление R_0 .
Получим управляемые резисторы: $\square$ - резистор

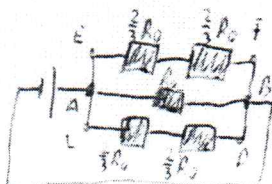


и соединим их так:



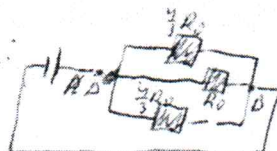
на
(резисторы ALI; DEB; AFG; GHB)
2 резистора заменим на 1 с
управляемым сопротивлением

и еще соединим так:



(на участках LD; AEF; GHI)
заменим параллельно соединенные
резисторы на один резистор
с сопротивлением $\frac{1}{R_H} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{2R_0} + \frac{1}{2R_0} = \frac{3}{2R_0} \Rightarrow R_H = \frac{2}{3}R_0$

и соединим так:

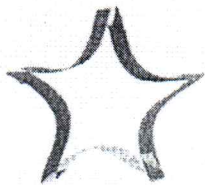


(на участке EFG и CD заменим
замкнутые на 1 с управляемым сопро-
тивлением)

Получаем полное сопротивление:

$$\frac{1}{R_H} = \frac{1}{\frac{2}{3}R_0} + \frac{1}{R_0} + \frac{1}{\frac{2}{3}R_0} = \frac{3}{2R_0} + \frac{1}{R_0} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}R_0} = \frac{5}{2R_0} = \frac{1}{\frac{2}{5}R_0} \Rightarrow R_H = \frac{2}{5}R_0 = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4 \text{ Ом}$$

(Замечание, что сопротивление на всех ветках осталось неизменным)



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 45-09-02

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

N 2

Пусть x -то, сколько первых классов обогнали километров за день.

Пусть y -то, сколько первых классов обогнали все километры за день.

Тоже все за день было $x + \frac{125}{100}x$ километров (т.к. за день первые обогнали на 35% больше километров, чем в прошлый день, то можно считать, что в прошлый день было $\frac{125}{100}x$ километров)

Тоже все за день было $y + \frac{20}{100}y$ километров (т.к. после дня первых обогнали на 20% больше, чем в прошлый день, то можно считать, что в прошлый день было $\frac{20}{100}y$ километров)

Тоже верно равенство:

$$x+y = \frac{110}{100} \left(\frac{125}{100}x + \frac{20}{100}y \right) \text{ и получаем } \frac{9}{4}x + \frac{4}{5}y < 250$$

$$x+y = \frac{11}{10} \left(\frac{5}{4}x + \frac{4}{5}y \right)$$

$$x+y = \frac{11}{8}x + \frac{22}{25}y$$

$$\frac{3}{25}y = \frac{3}{8}x$$

$$3y = 25x$$

$$y = \frac{25x}{3}$$

$$\frac{9}{4}x + \frac{4 \cdot 5}{8}x < 250$$

$$\frac{9 \cdot 2}{8}x < 250$$

$$x < \frac{2000}{63}$$

$$x < 32$$

$$x \in \mathbb{N}$$

$$x \equiv 0 \pmod{8} \text{ (т.к. } \frac{25}{8}x \in \mathbb{N} \text{)}$$

т.е. x может быть только 8, 16, 24

$$1) x=8 \Rightarrow y=25$$

$$2) x=16 \Rightarrow y=50$$

$$3) x=24 \Rightarrow y=75$$

$$1) x+y = 25+8=33 \quad \frac{33 \cdot 10}{11} = 30$$

$$2) x+y = 16+50=66 \quad \frac{66 \cdot 10}{11} = 60$$

$$3) x+y = 24+75=99 \quad \frac{99 \cdot 10}{11} = 90$$

Нет проверки
кратности.

т.е. Второй класс мог обогнать 30, 60 или 90 километров

