

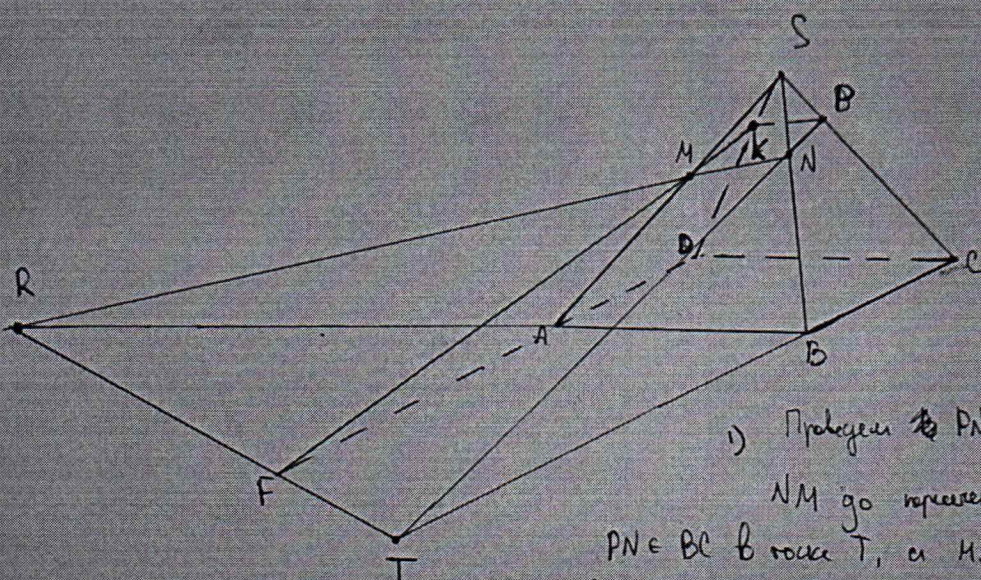


Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 92.11.01

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	12	13	13	0	2	10	15	77

Вариант 2



Дано: $ABCD$ - параллелограмм

$$SM:MA = 1:2$$

$$SN:NB = 1:3$$

$$SP:PC = 1:4$$

$KE(MNP)$

$$SK:KD = ?$$

1) Проведем PN до пересечения с BE и

NM до пересечения с BA . Пусть

$PN \in BE$ в точке T , и $NM \in BA$ в точке R . Точки R и T лежат в плоскости основания пирамиды и

в плоскости MNP . Соединим RT . Проведем DA до пересечения с RT в точке F . Через точки F и M проведем прямую, она будет лежать в плоскости DAS и поэтому пересечет SD в искомой точке K .

2) По теореме Менелая в $\triangle BSC$ с секущей TP :

$$\frac{CP}{PS} \cdot \frac{SN}{NB} \cdot \frac{BT}{TC} = 1 \Rightarrow \frac{BT}{TC} = \frac{3}{4}$$



3) По теореме Менелая в $\triangle ASB$ с секущей RN :

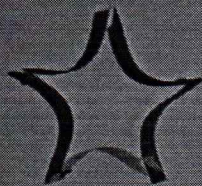
$$\frac{BN}{NS} \cdot \frac{SM}{AM} \cdot \frac{AR}{BR} = 1 \Rightarrow \frac{AR}{BR} = \frac{2}{3}$$

4) Т.к. $ABCD$ - параллелограмм, то $AD \parallel BC \Rightarrow FA \parallel BT$ (т.к. FA и BT лежат на прямой $AP=BC$)

Тогда $\triangle FRA$ подобен $\triangle TRB$ по трем углам $\Rightarrow \frac{AR}{BR} = \frac{AF}{BT} = \frac{2}{3}$

5) Пусть $BC = AD = y$, тогда из $\frac{BT}{TC} = \frac{3}{4}$, $BT = 3y$, тогда из $\frac{AF}{BT} = \frac{2}{3}$ $AF = 2y$ и

$$\frac{AF}{FD} = \frac{AF}{AF+AD} = \frac{2y}{2y+y} = \frac{2}{3}$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 92.11.01

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

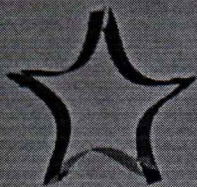
Вариант _____

№1 (продолжение).

б) По теореме Менелая для ΔASD и секущей FK :

$$\frac{DK}{KS} \cdot \frac{SM}{AM} \cdot \frac{AF}{FD} = 1 \Rightarrow \frac{DK}{KS} = 3 \Rightarrow SK:KD = 1:3$$

Ответ: плоскость MNP делит ребро SP в отношении 1:3



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 92.11.01

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Условие: $x > 0, y > 0, z > 0$
 $xy \neq 1, xz \neq 1, yz \neq 1$

№2

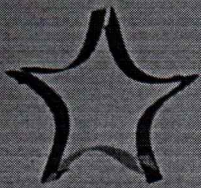
$$\begin{cases} \frac{\log_{25} x \cdot \log_3 y}{\log_{27} (xy)} = 1 \\ \frac{\log_5 y \cdot \log_{10} z}{\log_7 (yz)} = \frac{3}{5} \\ \frac{\log_{125} z \cdot \log_3 x}{\log_{21} (xz)} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\frac{1}{2} \log_5 x \cdot \log_3 y}{\frac{1}{3} \log_3 (xy)} = 1 \\ \frac{\log_5 y \cdot \frac{1}{2} \log_7 z}{\log_7 (yz)} = \frac{3}{5} \\ \frac{\frac{1}{3} \log_5 z \cdot \log_3 x}{\frac{1}{4} \log_3 (xz)} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\log_5 x \cdot \log_3 y}{\log_3 (xy)} = \frac{2}{3} \\ \frac{\log_5 y \cdot \log_7 z}{\log_7 (yz)} = \frac{6}{5} \\ \frac{\log_5 z \cdot \log_3 x}{\log_3 (xz)} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Пользуясь свойством $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ приведем систему к упрощенному виду:

$$\begin{cases} \frac{\log_3 x \cdot \log_3 y}{\log_3 (xy)} = \frac{2 \log_3 5}{3} \\ \frac{\log_3 y \cdot \log_3 z}{\log_3 yz} = \frac{6 \log_3 5}{5} \\ \frac{\log_3 z \cdot \log_3 x}{\log_3 (xz)} = \frac{3 \log_3 5}{4} \end{cases}$$

Т.к. $\log_3 5 \neq 0$, то все правые части не равны нулю, а значит, и левые не равны нулю и мы можем проверить выражения и использовать свойство $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$.

$$\begin{cases} \frac{\log_3 x + \log_3 y}{\log_3 x \cdot \log_3 y} = \frac{3}{2 \log_3 5} \\ \frac{\log_3 y + \log_3 z}{\log_3 y \cdot \log_3 z} = \frac{5}{6 \log_3 5} \\ \frac{\log_3 x + \log_3 z}{\log_3 x \cdot \log_3 z} = \frac{4}{3 \log_3 5} \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{3}{2 \log_3 5} & (1) \\ \frac{1}{\log_3 y} + \frac{1}{\log_3 z} = \frac{5}{6 \log_3 5} & (2) \\ \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 z} = \frac{4}{3 \log_3 5} & (3) \end{cases}$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 92.11.01

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

2/2 (продолжение)

Сложим (1) с (2) и вычтем третье:

$$\frac{2}{\log_3 y} = \frac{1}{\log_3 5} \left(\frac{2}{2} + \frac{5}{6} - \frac{4}{3} \right)$$

$$\frac{2}{\log_3 y} = \frac{1}{\log_3 5}$$

$$\log_3 y = 2 \log_3 5$$

$$\underline{y = 25}$$

Подставим y в (1):

$$\frac{1}{\log_3 x} = \frac{3}{2 \log_3 5} - \frac{1}{2 \log_3 5}$$

$$\log_3 x = \log_3 5$$

$$\underline{x = 5}$$

Подставим x в (3):

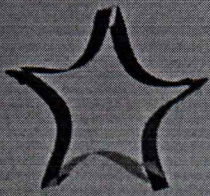
$$\frac{1}{\log_3 z} = \frac{4}{3 \log_3 5} - \frac{1}{\log_3 5}$$

$$\log_3 z = 3 \log_3 5$$

$$\underline{z = 125}$$

Подстановкой убеждаемся, что значения $x=5$, $y=25$, $z=125$ нам подходят.

Ответ: (5; 25; 125)



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 92.11.01

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

13

$$4^x + \sin^4 y + \ln^6 z = 25$$

Заметим, что $4^x \geq 0$, $\sin^4 y \geq 0$ и $\ln^6 z \geq 0 \Rightarrow$ ~~0 $\leq 4^x \leq 25$ / $0 \leq \sin^4 y \leq 25$ / $0 \leq \ln^6 z \leq 25$~~ каждое из этих выражений не превосходит 25. Значит, можно записать следующие неравенства:

$$\begin{cases} 4^x \leq 25 \\ \ln^6 z \leq 25 \end{cases} \begin{cases} x \leq \log_4 25 \\ |\ln z| \leq \sqrt[6]{25} \end{cases} \begin{cases} x \leq \log_2 5 \\ -\sqrt[6]{25} \leq \ln z \leq \sqrt[6]{25} \end{cases} \begin{cases} x \leq \log_2 5 \\ \frac{1}{e^{\sqrt[6]{25}}} \leq z \leq e^{\sqrt[6]{25}} \end{cases}$$

1. Т.к. $x \leq \log_2 5$, то $2^x \leq 2^{\log_2 5}$, то есть $2^x \leq 5$. Так как 2^x это возрастающая функция, то это утверждение верно.

$$\begin{aligned} 2. \quad 0 &\leq \sin^4 y \leq 1 \quad | \cdot (-4) \\ 0 &\geq -4 \sin^4 y \geq -4 \end{aligned}$$

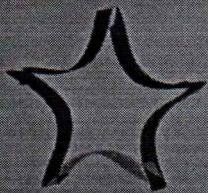
3. Т.к. $\ln z$ - возрастающая функция и $z \leq e^{\sqrt[6]{25}}$, то $8 \ln^3 z \leq 8 (\ln e^{\sqrt[6]{25}})^3 = 8 \cdot \sqrt[6]{25}^3 = 40$

$$\text{Итого: } 2^x \leq 5, -4 \sin^4 y \leq 0, 8 \ln^3 z \leq 40$$

$$2^x - 4 \sin^4 y + 8 \ln^3 z \leq 40 + 0 + 5 = 45$$

Что и требовалось доказать





Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 92.11.01

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

Уч

Рассмотрим выражение $a \cos x + b \sin x = c \quad | : \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Пусть φ такой угол, что $\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, тогда $\cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
Значит, можно переписать наше выражение в следующем виде:

$$\sin \varphi \cos x + \cos \varphi \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin(x + \varphi) \leq 1 \Rightarrow \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1 \Rightarrow c \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

И тогда:

$$a_1 \cos x + (a_2 + a_{1013} + a_{1014}) \sin x \leq \sqrt{a_1^2 + (a_2 + a_{1013} + a_{1014})^2}$$

$$a_1^2 + (a_2^2 + a_{1013}^2 + a_{1014}^2) = a_1^2 + a_2^2 + a_{1013}^2 + a_{1014}^2 + 2a_2 a_{1013} + 2a_2 a_{1014} + 2a_{1013} a_{1014} =$$

$$= \cos^2 10 + \cos^2 100 + \cos^2 10^{1013} + \cos^2 10^{1014} + 2 \cos 100 \cos 10^{1013} + 2 \cos 100 \cos 10^{1014} + 2 \cos 10^{1013} \cos 10^{1014} =$$

$$\approx \text{Заметим, что } \cos(100^\circ) = \cos(90^\circ + 10^\circ) = -\sin 10^\circ, \quad \cos 10^{1014} = \cos(10^{1013} + 9 \cdot 10^{1013})$$

$$10^{1014} : 4 \Rightarrow 9 \cdot 10^{1013} = 90 \cdot 10^{1012} : 360 \Rightarrow \cos 10^{1014} = \cos 10^{1013}$$

Тогда наше выражение принимает следующий вид:

$$\cos^2 10 + \sin^2 10 + 2 \cos^2 10^{1013} + 4 \cos 100 \cos 10^{1013} + 2 \cos^2 10^{1013} = 4 \cos^2 10^{1013} + 4 \cos 100 \cos 10^{1013} + 1 (*)$$

$$\cos 10^{1013} = \cos(10^{1012} + 10^{1011} \cdot 90) = \cos(10^{1012}) = \dots = \cos(10^4) = \cos(10^3 + 9 \cdot 10^3) = \cos(10^3) = \cos(1000) = \cos(2 \cdot 500) =$$

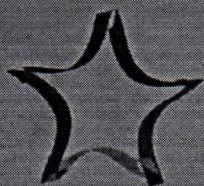
$$= \cos(100 + 130^\circ) = -\cos 100.$$

Подставим найденные $\cos$ в (*):

$$4 \cos^2 100 + 4 \cos^2 100 + 1 = 8 \cos^2 100 + 1$$

Значит, $a_1 \cos x + (a_2 + a_{1013} + a_{1014}) \sin x \leq \sqrt{1} = 1$

Ответ: максимальное значение - 1



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 92.11.01

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

№7

Дано:

$$T_1 = 100^\circ\text{C} = 373\text{K}$$

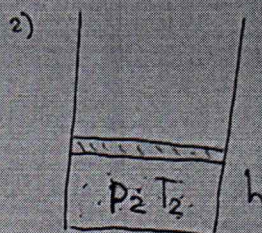
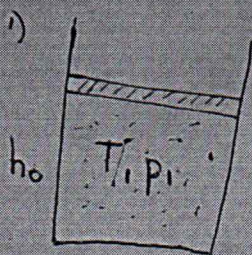
$$h_0 = 0,6\text{ м}$$

$$h = 0,15\text{ м}$$

$$p_2 = 2p_1$$

$$S = 500\text{ см}^2 = 0,05\text{ м}^2$$

$m = ?$



1. Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона для первого и для второго случаев

$$p_1 V_1 = \nu R T_1 \quad (1)$$

$$p_2 V_2 = \nu R T_2 \quad (2)$$

Поделим (1) на (2):

$$\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$\frac{8h_0}{28h} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow T_2 = T_1 \frac{2h}{h_0}$$

2. Так как во втором положении установилось равновесие, то атмосферное давление воздуха снаружи равно давлению пара: $p_2 = p_0$

$$3. p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} R T_2$$

$$p_0 S \cdot h = \frac{m}{\mu} R \cdot T_1 \cdot \frac{2h}{h_0}$$

$$m = \frac{p_0 S \cdot \mu \cdot h_0}{2 R \cdot T_1} = \frac{10^5 \cdot 0,05 \cdot 18 \cdot 10^{-3} \cdot 0,6}{2 \cdot 8,31 \cdot 373} = \frac{27}{8,31 \cdot 373} \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 92$$

Ответ: $m = 92$.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

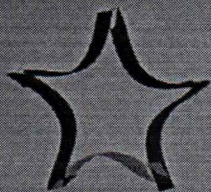
шифр 921101

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

№3

1. Соединим точки A, A' и B, B' . Так как ~~это~~ эти две лучи не параллельны то они пересекутся в центре линзы $\Rightarrow$ центр линзы лежит на пересечении этих прямых и имеет координаты $(45; 25)$. Обозначим центр буквой O . +4
2. Чтобы определить положение линзы проведем отрезки AB и $A'B'$ до их пересечения в точке T . Тогда линза лежит на прямой TO . +4
3. Чтобы определить положение фокуса проведем из A прямую, перпендикулярную линзе. Так как лучи, падающие перпендикулярно линзе, проходят через фокус, то фокус будет лежать на пересечении перпендикулярного луча и главной оптической оси. Главную оптическую ось мы получим, проведя прямую через точку O перпендикулярно линзе. Перпендикулярный луч мы получим, проведя прямую через точку A' и основание перпендикуляра, опущенного на линзу из точки A . Координаты фокуса получим $(50; 23)$.
4. Второй фокус строится аналогично, он лежит на пересечении главной оптической оси и прямой, проходящей через точку B и основание перпендикуляра, опущенного из точки B' на линзу. Координаты этого фокуса $(40; 27)$.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 92.11.01

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

№ 6

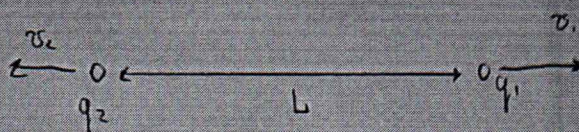
Дано:

q_1, q_2

m_1, m_2

L

$v_1, v_2 = ?$



Когда шарики отпустят они полетят в противоположные стороны и их скорость будет стремиться к какому-то значению. Когда скорость становится постоянной, сила Кулона перестает действовать на шарики и потенциальная энергия стремится к нулю. Тогда мы можем записать закон сохранения энергии в общем виде:

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 L} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 L m}}$$

Тогда скорости первого и второго шарика соответственно равны

$$v_1 = \sqrt{\frac{2q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 L m_1}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 L m_2}}$$

Ответ: $v_1 = \sqrt{\frac{2q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 L m_1}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 L m_2}}$