

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 7211-18-13

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	5	0	10	10	10	7	15	69

Вариант 2

1. Пусть студентов y , а клавиша стоит $x < 3000 < x < 10000$,
 $x \in \mathbb{Z}$.

Изначально нужно ввести клавишу $\frac{x}{y}$, но две откла-
зышки по клавише теперь клавишу нужно ввести $\frac{x}{y-2}$ и что-
бы компенсировать данную разницу клавишу пришлось
добавить по 1000 руб. Получаем:

$$\frac{x}{y-2} = \frac{x}{y} + 1000 \quad | \cdot (y-2)y$$

$$xy = xy - 2x + 1000(y^2 - 2y) \quad | -xy$$

$1000(y^2 - 2y) = 2x \Rightarrow x = 500y(y-2)$. Заметим,
что $x = 1000k$, тогда где $k \in \mathbb{N}$, тогда:

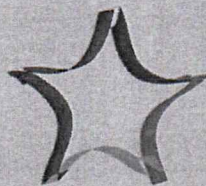
$$2k = y(y-2), \text{ значит т.к.}$$

y и $y-2$ одинаково четны
произв. получается значит $y = 2n$, где $n \in \mathbb{Z}$ (то есть четн.)

$$x = 1000n(2n-2) = 2000 \cdot n(n-1). \quad n \neq 1, \text{ т.к. } x \neq 0.$$

Проверим для $n=2$, получается $x = 2000 \cdot 2 = 4000$, если
 $n \geq 3$, то $x \geq 12000$, а $(n \in \mathbb{N})$; а по условию: $3000 < x < 10000$,
значит подходит только $n=2$ и $x=4000$.

Ответ: $x=4000$ рублей клавиша стоит 4000 рублей.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 72/1-08-03

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

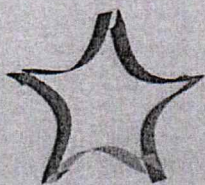
Вариант 2

2. Всего чисел 81. Однозначных 9, значащих двузначных $81 - 9 = 72$. Всего цифр: $72 \cdot 2 + 9 \cdot 1 = 153$. Определяется число в записи которого исп. 72 цифры. Наименьшим число будет если всего старш. разр. одна наиб. цифра, то есть нужно чтобы первые цифры числа были 9. Будем этого добиваться вычеркивая цифры стоящие перед 9 и меньше 9.

Первые цифры пол. числа:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ... Эти первая цифра была 9, нужно вычеркивать перед стоящ. цифрами. Таких 8, значит ост. выч. $81 - 8 = 73$ цифр. Далее цифры:
9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19; перед сл. 9 стоят 19 цифр, которые также нужно выч. ост. $81 - 8 - 19 = 54$ цифр. Далее по аналогии можно выч. по 19 цифр во II и III разр. десятков. ост. $54 - 19 \cdot 2 = 16$ цифр. Теперь в разр. в 4-ом разр. десятич. наиб. цифру. Такая цифра 7, т.к. больше цифр ост. не получится, ведь тогда выч. и раз. 8 нужно 18 цифр, а ост. лишь 16, и это как раз дост. тогда выч. все те цифры перед 7 и больше цифр выч. мы не можем, а значит наиб. такое число это первая 9 из 10, 9 из 20, 9 из 30, 9 из 40, и 9 из первых 50 чисел, а далее посл. идут 48, 49 и т.д.

Получаем: 99997484950...81.

Ответ: 9999748495051...8081.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 72/1-18-13

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

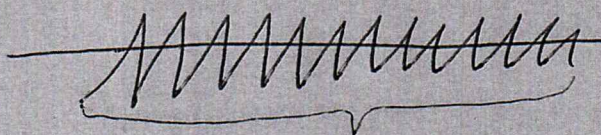
Вариант 2

3. Заметим, что n -угольником, называемая замкнутой ломаная из n звеньев и ребер.

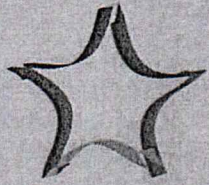
Рассмотрим n -угольник, где n представим как $2k+1$, где $k \in \mathbb{N}$.
Расположить $n-1$ сторону, чтобы какая-либо прямая пересекала все их просто, достаточно расположить так:

Но n -угольник это замкн. лмн. Она должна быть замкн. И тогда расположить посл. сторону, она не должна пересечь все данные $n-1$ стороны. А значит такая прямая могла пересечь все данные стороны, она должна проходить через $n-1$ вершину, что невозможно. Аналогично и с четным n -ом (конечно, другое расположение условия, и оно может быть другим).
Последние вершины n -угольника должны располагаться или все, выше данных сторон, а значит прямая не пересечет посл. сторону.

Ответ: а) нет; б) нет.



$n-1$ сторона



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 72/1-08-03

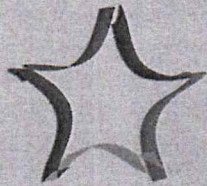
Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

4. Заметим, что 7^{2024} содержит в себе макс. 2024 цифр (т.к. если взять число 10^{2024} , то у него $\underbrace{100\dots0}_{2024}$, а число $7 < 10$, значит макс. 2025 цифр). Теперь предположим, что сл. чис в этой прогрессии также максимальны, пусть все цифр числа соот. макс 2025 равно 9 , значит максимальное второе число: $2025 \cdot 9 = 18225$. Данное число поизначное, значит макс. третье число: $5 \cdot 9 = 45$. Оно двузначное соответ- ственно 4-е число оно конечно в данной последователь- дальше идет повторяющееся четвертое число. Можем на пятом месте в данной посл. находить однозначное число. Найдем уик в данной последовательности:

$$\begin{aligned} 7^2 &= 49 = 13 = 4 & 7^5 &= 16807 = 22 = 4 & 7^8 &= 5764801 = 21 = 4 \\ 7^3 &= 343 = 10 = 1 & 7^6 &= 117649 = 28 = 10 = 1 & 7^9 &= 40353607 = 28 = 1 \\ 7^4 &= 2401 = 9 & 7^7 &= 823543 = 25 = 7 \neq \end{aligned}$$

Получаем уик из 6 значений. Теперь определим на каком месте находится 2024 . $2024 : 6 = 2024 \div 6 = 337 \text{ и } 2$. И вычитаем единицу, т.к. уик начинается со 1-ой степени. $2 - 1 = 1$. Значит это первое значение в уике и равно 4.

Ответ: на пятом месте находится 4.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 72/1-08-03

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

$$5 \quad S_{\text{обш}} = R^2 \cdot \pi. \quad m = \rho \cdot V$$

$$S_{\text{мал}} = r^2 \cdot \pi. \quad V = S \cdot l.$$

Найдем m_1 : $S_{\text{мал}} \cdot l \cdot \rho_1 + (S_{\text{обш}} - S_{\text{мал}}) \cdot \rho_2 \cdot l = l (S_{\text{обш}} \cdot \rho_2 + S_{\text{мал}} (\rho_1 - \rho_2))$

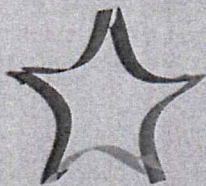
$$m_2: S_{\text{мал}} \cdot l \cdot \rho_2 + (S_{\text{обш}} - S_{\text{мал}}) \cdot \rho_1 \cdot l = l (S_{\text{обш}} \cdot \rho_1 + S_{\text{мал}} (\rho_2 - \rho_1)).$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l (R^2 \cdot \pi \cdot \rho_2 + r^2 \cdot \pi (\rho_1 - \rho_2))}{l (R^2 \cdot \pi \cdot \rho_1 + r^2 \cdot \pi (\rho_2 - \rho_1))} = \frac{R^2 \cdot \rho_2 + r^2 \cdot \rho_1 - r^2 \cdot \rho_2}{R^2 \cdot \rho_1 + r^2 \cdot \rho_2 - r^2 \cdot \rho_1}.$$

- все известно, поэтому можем найти m_2 , подставив значения, что $\frac{R}{r} = \frac{1}{0,25} = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \frac{1}{16}$. Подставим:

$$\begin{aligned} & \frac{1 \cdot 6000 + \frac{1}{16} \cdot 1500 - \frac{1}{16} \cdot 6000}{1 \cdot 1500 + \frac{1}{16} \cdot 6000 - \frac{1}{16} \cdot 1500} = \frac{16 \cdot 6000 + 1500 - 6000}{16 \cdot 1500 + 6000 - 1500} = \\ & = \frac{960 - 45}{240 + 45} = \frac{915}{285} = \frac{183}{57} = \frac{61}{19} = 3 \frac{4}{19} \approx 3 \frac{4}{20} \approx 3,2. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{m_1}{m_2} \approx 3,2$.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 72/1-08-03

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

$$t_0 = 0^\circ$$

$$t_1 = 100^\circ$$

$$l_1 = 12 \text{ мин}$$

$$l_2 = 15 \text{ мин}$$

$$V_b = 3 \text{ м}$$

$$\rho_b = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$= 1 \frac{\text{кг}}{\text{дм}^3}$$

$$\lambda = 3,3 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$c_b = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$$

$$P_{\text{пл}} = \frac{Q_b}{T}$$

$$Q_b = m_b \cdot c_b \cdot (t_1 - t_0) = V_b \cdot \rho_b \cdot c_b \cdot (t_1 - t_0)$$

$$P_{\text{пл}} = \frac{V_b \cdot \rho_b \cdot c_b \cdot (t_1 - t_0)}{T_1}$$

2

2

После этого вводу добавили лед, при t_1 , добавили лед, и всю смесь стали нагревать до кипения. Определим какая уся. Темп, после уся. темп. бал. кипения. ур. темп. бал.

$$Q_b + Q_d = 0$$

$$Q_b = m_b \cdot c_b \cdot (t_1 - t), Q_d = -2 \cdot m_l + m_l \cdot c_b \cdot (t - t_0)$$

$t_0 = 0$, поэтому можно опустить.

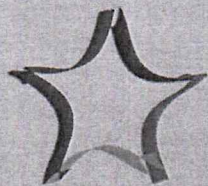
$$\Rightarrow t = \frac{m_b \cdot c_b \cdot t_1 - 2 \cdot m_l}{c_b (m_b + m_l)}$$

$$Q_{\text{пл}} = Q_{\text{сш}}; Q_{\text{пл}} = T_2 \cdot P; Q_{\text{сш}} = (m_b + m_l) \cdot c_b \cdot (t_1 - t)$$

$$P_{\text{пл}} = \frac{(m_b + m_l) \cdot c_b \cdot (t_1 - t)}{T_2}$$

$$\frac{(m_b + m_l) \cdot c_b \cdot (t_1 - \frac{m_b \cdot c_b \cdot t_1 - 2 \cdot m_l}{c_b (m_b + m_l)})}{T_2} = \frac{V_b \cdot \rho_b \cdot c_b \cdot (t_1 - t_0)}{T_1}$$

1/2



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 72/1-08-03

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

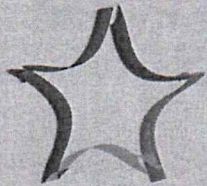
$$5. \frac{m_b \cdot t_1 + m_l \cdot t_1 - m_b \cdot t_1 + m_l \cdot \frac{2}{c\beta}}{T_2} = \frac{m_b \cdot (t_1 - t_0)}{T_1}$$

$$m_l \left(t_1 + \frac{2}{c\beta} \right) = \frac{m_b \cdot (t_1 - t_0) \cdot T_2}{T_1}$$

$$m_l = \frac{m_b \cdot (t_1 - t_0) \cdot T_2}{T_1 \left(t_1 + \frac{2}{c\beta} \right)} = \frac{V_b \cdot \rho_b \cdot (t_1 - t_0) \cdot T_2}{T_1 \cdot \left(t_1 + \frac{2}{c\beta} \right)} =$$

$$= \frac{3.1 \cdot 1 \cdot \frac{\text{кг}}{\text{д}} \cdot 100\% \cdot 12.5 \text{ мм}}{12 \text{ мм} \cdot \left(100 + \frac{330000}{4200} \right) \%} = \frac{4500 \text{ кг}}{12 \cdot \left(100 + \frac{330000}{4200} \right)} =$$
$$= \frac{375 \text{ кг}}{(100 + 78.6)} \approx 2 \text{ кг}$$

Ответ: $m_l \approx 2 \text{ кг}$.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 72/1-08 D3

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

7. $\rho_m = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
 $F = 5 \text{ Н}$
 $V = 1 \text{ л} = 0,001 \text{ м}^3$
 $g = 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}}$

$$F_{\text{тяг}} = F_{\text{прш}} + F_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{\text{прш}} = F_{\text{тяг}} - F_A$$

$$F_{\text{тяг}} = V \cdot \rho_T \cdot g$$

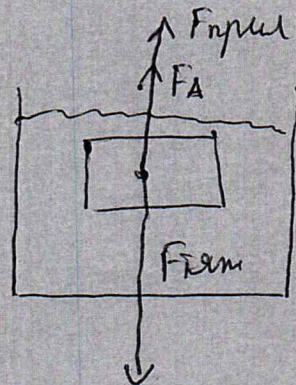
$$F_A = V_T \cdot \rho_m \cdot g$$

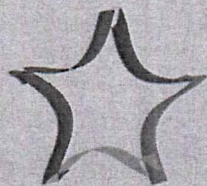
$$\frac{F_{\text{прш}}}{V_T \cdot g} = \rho_T - \rho_m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_T = \frac{F_{\text{прш}}}{V_T \cdot g} + \rho_m$$

$$\rho_T = \frac{5 \text{ Н}}{0,001 \text{ м}^3 \cdot 10 \frac{\text{Н}}{\text{кг}}} + 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 1500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Ответ: $\rho_T = 1500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.





Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 72/1-08-03

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

8. Заметим, что стержень однородный,
значит, центр масс его находится
середине, на длине $\frac{L}{2}$.

$$F_1 = F_{\text{тяг}} = m_1 \cdot g$$

$$F_1 = 2T_1 \Rightarrow \frac{m_1 \cdot g}{2} = T_1.$$

Запишем правило моментов относи-
тельно точки A.

$$F_2 \cdot \frac{L}{2} + T_1 \cdot (L - S) = T_1 \cdot L$$

$$\frac{F_2 \cdot L}{2} = T_1 (L - L + S)$$

$$T_1 = \frac{F_2 \cdot L}{2 \cdot S}; F_2 = m_2 \cdot g$$

$$m_1 = \frac{m_2 \cdot g \cdot L}{2S} \cdot \frac{2}{g}$$

$$m_1 = m_2 \cdot \frac{L}{S}$$

По укл. $L = 50 \text{ см}$, $S = 10 \text{ см}$, $m_2 = 2 \text{ кг} \Rightarrow m_1 = 2 \cdot \frac{50}{10} = 10 \text{ кг}$.

Ответ: $m_1 = 10 \text{ кг}$.

