

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

Ю-ЕН-10-128

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	6	12	13	13	10	10	12	13	89

Вариант 2

1. $7\sqrt{4-3x} - 3|2x-5| \leq 7x-3|2\sqrt{4-3x}-5|$
 $4-3x \geq 0 \Rightarrow 4-3x \geq 0$
 $3x \leq 4$
 $x \leq \frac{4}{3}$, при таких x $2x-5 \leq \frac{8}{3}-5 \leq -\frac{7}{3} < 0$

$\sqrt{4-3x} + 6x - 15 \leq 7x - 3|2\sqrt{4-3x}-5|$

$2\sqrt{4-3x} - 5 \geq 0$

$\sqrt{4-3x} - 15 \leq x + 6\sqrt{4-3x} + 15$

$2\sqrt{4-3x} - 5 < 0$

$7\sqrt{4-3x} - 15 \leq x + 6\sqrt{4-3x} - 15$

(1) $\sqrt{4-3x} \geq 2,5$

$13\sqrt{4-3x} \leq x+30$

$4-3x \geq 6,25$

$169 \cdot 4 - 169 \cdot 3x \leq x^2 + 60x + 900$

$3x \leq -2,25$

$x^2 + 57x + 224 \geq 0$

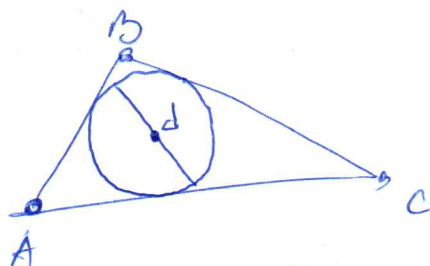
$x \leq -0,75$

2

Дано:
ABC
диаметр впис. окр.
= 8

AB; BC; AC; d

и P-2



Решение

Дано центр впис. окр. можно меньше ~~каждой~~ высоты треугольника, т.к. окружность не выходит за его пределы, а т.к. высота - кратчайшее расстояние от вершины до прямой $\Rightarrow$ любая высота меньше ребра Δ , проведенного из той же вершины $\Rightarrow d < AB, d < BC, d < AC$

$$1) \text{ If } AC + BC = AB, \quad BC = b \Rightarrow AC = b-d, \quad AB = b+d, \quad d = b-2d$$

$$\begin{cases} r = \frac{S}{P} = \frac{\sqrt{p(p-AC)(p-BC)(p-AB)}}{P} = \frac{d}{2P} \\ p = \frac{b-d+b+b+d}{2} = \frac{3}{2}b \\ d = 8 = b-2d \end{cases}$$

$$r = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}b(\frac{3}{2}b-b-d)(\frac{3}{2}b-b+d)(\frac{3}{2}b-b)}}{\frac{3}{2}b} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}b(b-b-d)(\frac{1}{2}b+d)\frac{1}{2}b}}{\frac{3}{2}b} = 4$$

$$\frac{\frac{3}{2}b(\frac{1}{4}b^2-d^2)\frac{1}{2}b}{3 \cdot \frac{3}{2}b} = 16$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}b^2 - d^2 = 48 \quad | \cdot 4 \\ b - 2d = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 4 - \frac{b}{2} \\ b^2 - 4(4 - \frac{b}{2})^2 = 192 \end{cases}$$

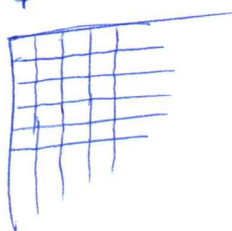
$$b^2 - 64 + 16b - b^2 = 192$$

$$16b = 256$$

$$\begin{cases} b = 16 \\ d = 4 \end{cases}$$

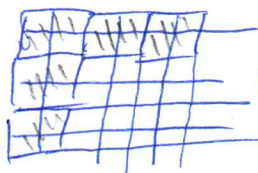
$$P = AC + BC + AB = b-d + b + b+d = 3b = \underline{48}$$

н/д

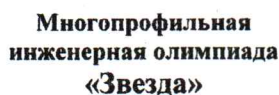


Возьмем два квадрата 2×2 , лежащих в 1 ряду (вертикали), они могут же могут пересекаться т.е. в этом случае у них будет не минимум 1 поле пересечения, что противоречит условию. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в одном ряду (вертикали) при наибольшей площади квадраты будут лежать вплотную



тогда образуем можно заполнить

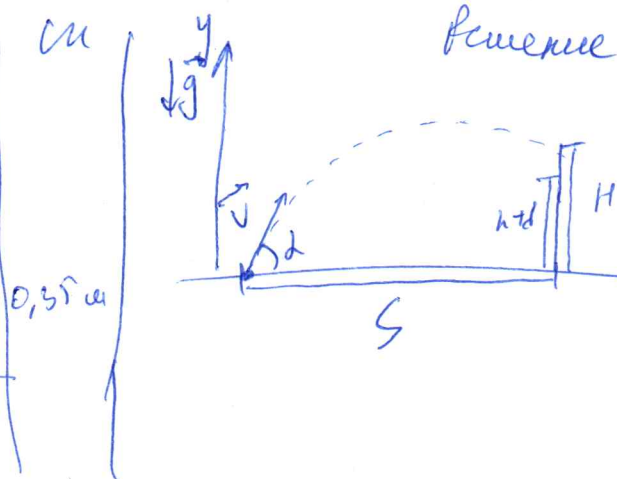


Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

исходный квадрат 24×22 , при дажке 25×23 т.е. даше стороны возросшие 2-х кратное число. Заметим, что полученный квадрат записан не во всю длину площади, т.к. он расположен слева берем дажу. Сформирован квадрат полученный прямоугольник 24×22 и сдвигаем его на 1 метру вправо и 1 метру вниз мы заполнили тем же образом дажу сверху, таким же образом мы заполняем дажу снизу при сдвиге на 1 метру вниз, метру влево / вправо. В таком случае с квадратом полученным будет пересекаться квадратом первой толщой в 1 метру, т.е. условие выполняется. Таким образом мы заполнили весь исходный прямоугольник. Т.е. мы использовали больше толщой дажу для каждого строки $\Rightarrow$ полученное количество квадратов является максимальным

$$N = \frac{25-1}{2} \cdot (23-1) = \frac{24 \cdot 22}{2} = 264$$

$\lambda = 20 \text{ nm}$
 $A = 5 \text{ nm}$
 $v = 20 \text{ m/s}$
 $h = 2.15 \text{ m}$
 $b = 35 \text{ m}$
 $i = 10 \text{ m}^2$



Иногда забить гол
лучше, чем забить гол
мечом в генерале
→ $x(1+d)H$, когда меч
продолжит ростание z

$$V_x = V \cos \alpha$$

$$V_y = V \sin \alpha - g t$$

$$t = \frac{S}{V \cos \alpha}$$

$$V_y = V \sin \alpha - \frac{g S}{V \cos \alpha}$$

$$h' = V \sin \alpha t - \frac{g t^2}{2} = V \sin \alpha \frac{S}{V \cos \alpha} - \frac{g S^2}{2 V^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\frac{S}{V \cos \alpha} (V \sin \alpha - \frac{g S}{V \cos \alpha}) =$$

$$= \frac{S}{V \cos \alpha} \left(\frac{V^2 2 \sin \alpha \cos \alpha - g S}{2 V \cos \alpha} \right) = \frac{20}{20 \cos \alpha} \left(\frac{400 \cdot \sin 2\alpha - 200}{2 \cdot 20 \cdot \cos \alpha} \right) =$$

$$= \frac{5(2 \sin 2\alpha - 1)}{\cos^2 \alpha} = \frac{20 \sin 2\alpha - 5}{\cos^2 \alpha} = 20 \operatorname{tg} \alpha - 5(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) =$$

$$= 20 \operatorname{tg} \alpha - 5 \operatorname{tg}^2 \alpha - 5 \quad \checkmark$$

$$h-d \leq 20 \operatorname{tg} \alpha - 5 \operatorname{tg}^2 \alpha - 5 \leq H$$

$$-H \leq 5 \operatorname{tg}^2 \alpha - 20 \operatorname{tg} \alpha + 5 \leq -h-d$$

$$3 \operatorname{tg} \alpha = x \quad -H \leq 5x^2 - 20x + 5 \leq -h-d$$

абсц. α -а, которое находится, берем α

$$5x^2 - 20x + 5 = -H$$

$$5x^2 - 20x + 8 = 0$$

$$D = 400 - 4 \cdot 40 = 240$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{240}}{10} = 2 \pm \sqrt{\frac{240}{100}} = 2 \pm \sqrt{2.4}$$

$$\sqrt{2.4} < \sqrt{2.5} \Rightarrow 2 - \sqrt{2.4} > 2 - \sqrt{2.5}$$

$$2 + \sqrt{2.4} < 2 + \sqrt{2.5}$$

$$5x^2 - 20x + 5 = -h-d$$

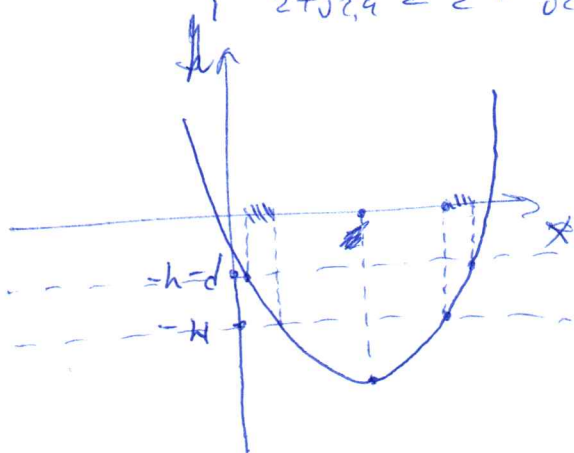
$$5x^2 - 20x + 5 + 2.5 = 0$$

$$10x^2 - 40x + 7.5 = 0$$

$$D = 1600 - 600 = 1000$$

$$x = \frac{40 \pm \sqrt{1000}}{20} = 2 \pm \sqrt{\frac{1000}{400}}$$

$$= 2 \pm \sqrt{2.5}$$



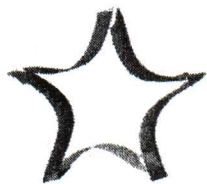
$$2 - \sqrt{2.5} < \operatorname{tg} \alpha < 2 - \sqrt{2.4}$$

$$2 + \sqrt{2.4} < \operatorname{tg} \alpha < 2 + \sqrt{2.5}$$

$$\arctg(2 - \sqrt{2.5}) < \alpha < \arctg(2 - \sqrt{2.4})$$

$$\arctg(2 + \sqrt{2.4}) < \alpha < \arctg(2 + \sqrt{2.5})$$

3



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 10-ЕИ-10-128

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

6

дано:

$$\eta = 0,5$$

$$m = 3 \text{ кг}$$

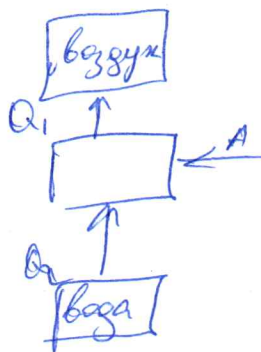
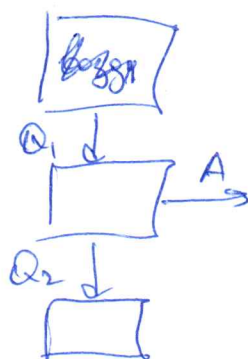
$$T_0 = 0^\circ \text{C}$$

$$Q = 150 \frac{\text{кДж}}{\text{К}}$$

$$\lambda = 330 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$$

$$\Delta T = ?$$

Решение



Тепловая машина

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 0,5$$

$$Q_2 = m \cdot \lambda$$

$$Q_1 = \Delta T \cdot C$$

$$Q_1 - Q_2 = 0,5 Q_1$$

$$Q_2 = 0,5 Q_1$$

$$Q_1 = 2 Q_2$$

$$\Delta T \cdot C = 2 \cdot m \cdot \lambda$$

$$\Delta T = \frac{2 \cdot m \cdot \lambda}{C} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 330 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^3} = \frac{66}{5} = 13,2^\circ \text{C}$$

10

7

дано: $m = 1 \text{ кг}$

$$l = 2 \text{ м}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

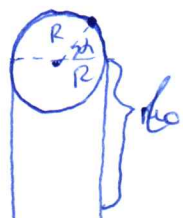
$$R = 10 \text{ мм}$$

или

91 мм

$$\gamma = ?$$

Решение

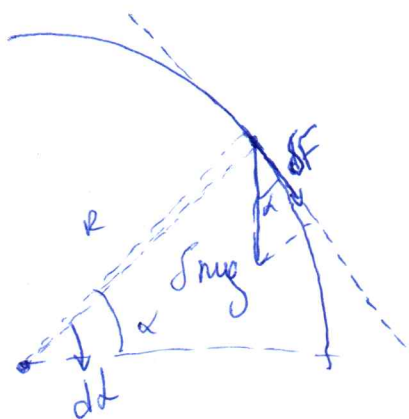


$$h = \frac{l - \pi R}{2}$$

$$m = m_0 \cdot \frac{h}{l}$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$\rho \cdot h = \frac{m}{l} \cdot h = m \cdot \frac{h - \pi R}{2 l}$$



$$dF = dm g \cos \alpha$$

$$dm = \rho \cdot l = \rho \cdot R d\alpha$$

$$\int dF = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho R d\alpha g \cos \alpha = \rho R g (\sin 45^\circ - \sin 0^\circ) =$$

$$= \frac{\rho R g}{\sqrt{2}}$$

$$T = F + m g = \frac{\rho R g}{\sqrt{2}} + m g \frac{l - \pi R}{l} = \frac{m g}{l} \left(\frac{R}{\sqrt{2}} + \frac{l - \pi R}{2} \right) =$$

$$= \frac{1 \cdot 10}{2} \left(\frac{0,1}{\sqrt{2}} + 2 - 3,14 \cdot 0,1 \right) \approx 5(0,071 + 2 - 0,314) =$$

$$= 5(1,686 - 0,071) = 541,615 \approx 8,1 \text{ H}$$

12

11

$$7\sqrt{4-3x} - 3|2x-5| \leq 7x - 3|2\sqrt{4-3x} - 5|$$

$$7\sqrt{4-3x} + 6x - 15 \leq 7x - 3|2\sqrt{4-3x} - 5|$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{4-3x} - 5 \geq 0 \\ 7\sqrt{4-3x} - 15 \leq x - 6\sqrt{4-3x} + 15 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{4-3x} - 5 < 0 \\ 7\sqrt{4-3x} - 15 \leq x + 6\sqrt{4-3x} - 15 \end{cases} \quad (2)$$

$$(1) \begin{cases} \sqrt{4-3x} \geq 2,5 \\ 13\sqrt{4-3x} \leq x + 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4-3x \geq 6,25 \\ 169 \cdot 4 - 169 \cdot 3x \leq x^2 + 60x + 900 \end{cases}$$

$$3x \leq -2,25$$

$$x^2 + 567x + 224 \geq 0 \quad D = 567^2 - 4 \cdot 224 = 320593$$

$$x \leq -0,75$$

$$x = \frac{-567 \pm \sqrt{320593}}{2}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{-567 + \sqrt{320593}}{2} \\ x \leq \frac{-567 - \sqrt{320593}}{2} \end{cases} \Rightarrow x \leq \frac{-567 - \sqrt{320593}}{2}$$

$$x \leq -0,75$$

025:

$$4-3x \geq 0$$

$$x \leq \frac{4}{3}$$

Заметим, что при каких-то x

$$2x - 5 \leq \frac{8}{3} - 5 = -\frac{7}{3} < 0$$

брана < 0

$$\begin{array}{r} \times 567 \\ \times 567 \\ \hline 3969 \\ + 3402 \\ 2835 \\ \hline 321489 \\ \quad 896 \\ \hline 320593 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 565,5 \\ \times 565,5 \\ \hline 28275 \\ + 28275 \\ 33930 \\ 28275 \\ \hline 319790,25 \end{array}$$

Округ:

$$\frac{-567 + \sqrt{320593}}{2} \approx 0,75$$

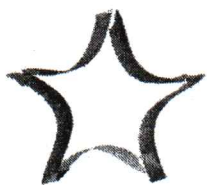
$$\sqrt{320593} \approx 565,5$$

$$320593 > 319790,25$$

$$\frac{-567 - \sqrt{320593}}{2} \approx -0,75$$

$$-\sqrt{320593} < 565,5$$

(4)



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр Ю-ЕМ-10-18

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 2

$$(2) \begin{cases} \sqrt{4-3x} < 2,5 \\ \sqrt{4x+3x} \leq x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -0,75 \\ 4-3x \leq x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -0,75 \\ x^2+3x-4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -0,75 \\ (x-1)(x+4) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -0,75 \\ x \geq 1 \\ x \leq -4 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$$

X710
~

(+)

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{-567 - \sqrt{320593}}{2} \\ x \leq \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{-567 - \sqrt{320593}}{2} \\ 1 \leq x \leq \frac{4}{3} \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty, \frac{-567 - \sqrt{320593}}{2}] \cup [1; \frac{4}{3}]$

$$a + \frac{1}{b} = 4$$

$$b + \frac{1}{c} = 1$$

$$c + \frac{1}{d} = 4$$

$$d + \frac{1}{a} = 1$$

$$+ \frac{1}{b} = 4 \quad | \cdot b$$

$$+ \frac{1}{a} = 1 \quad | \cdot a$$

$$b+1=4b$$

$$b+1=a$$

$$a=4b$$

$$b^2+1=4b$$

$$a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$$

Заметим, что если a в обеих системах
а заменить на c , b на d , c на a , d на b ,
то системы не изменят свой вид $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a=c, b=d$$

$$\begin{cases} 4b^2-4b+1=0 \\ a=4b \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2b-1)^2=0 \\ a=4b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=4b \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=2 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\frac{1}{2} \\ c=2 \\ d=\frac{1}{2} \end{cases}$$

(+)

при данных a, b, c, d

N 8

Дано:

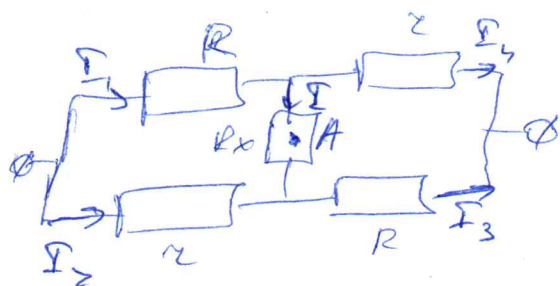
$$R = 16 \text{ Ом}$$

$$z = 4 \text{ Ом}$$

$$R_0 = R_x$$

$$R_x = ?$$

Решение



Замечание, что все резисторы симметричны относительно м. А. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow I_3 = I_1, I_2 = I_4, I = I_1 - I_2 \text{ (по правилу Кирхгофа)}$$

$$U = I_1 R + I_2 z$$

$$I_0 = I_1 + I_2$$

$$R_x = \frac{U}{I_0} = \frac{I_1 R + I_2 z}{I_1 + I_2} \quad \checkmark$$

I правило Кирхгофа: $I_1 R + (I_1 - I_2) R_x = I_2 z \quad \checkmark$

$$I_1 (R + R_x) = I_2 (z + R_x)$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{z + R_x}{R + R_x} \quad \checkmark$$

$$R_x = \frac{\frac{z + R_x}{R + R_x} R + z}{\frac{z + R_x}{R + R_x} + 1} = \frac{z + R_x}{2} \quad \checkmark$$

$$R_x = \frac{\frac{4 + R_x}{16 + R_x} \cdot 16 + 4}{\frac{4 + R_x}{16 + R_x} + 1}$$

$$\frac{4 + R_x}{16 + R_x} + R_x = \frac{4 + R_x}{16 + R_x} \cdot 16 + 4$$

$$4 + R_x + 16R_x + R_x^2 = 64 + 16R_x + 64 + 4R_x$$

$$R_x^2 = 3R_x - 12 \quad \checkmark$$

$$D = 9 - 4 \cdot (-12) = 61 \quad \checkmark$$

$$R_x = \frac{3 \pm \sqrt{61}}{2} \quad \checkmark \quad R_x = \frac{3 + \sqrt{521}}{2} \text{ Ом}$$