

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 34-09-07

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	12	12	13	—		10	15	4	66

Вариант 1

Задача n 1.

Имеем все 3 равенства системы:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2 + 3 + 4 = (y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 9 = y^2 + 2yz + z^2 + x^2 + 2xz + z^2 + x^2 + 2xy + y^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

$$9 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

$$(x+y+z)^2 = 9$$

$$x+y+z = 3 \quad \text{п.к. } x, y, z \geq 0.$$

$$1. \quad x^2 + 2 = (y+z)^2$$

$$2. \quad y^2 + 3 = (x+z)^2$$

$$3. \quad z^2 + 4 = (x+y)^2$$

Понятно вычтем каждое равенство, т.е. (1) и (2), (2) и (3), (1) и (3).

например (2) - (3)

$$y^2 + 3 - z^2 - 4 = (x+z)^2 - (x+y)^2$$

$$(y-z)(y+z) - 1 = (x+z-x-y)(x+z+x+y)$$

$$(y-z)(y+z) = - (y-z)(2x+z+y) + 1.$$

$$(y-z)(y+z) + (y-z)(2x+z+y) = 1.$$

$$(y-z)(2x+z+y+y+z) = 1.$$

$$(y-z)(2x+2z+2y) = 1$$

$$2(y-z)(x+z+y) = 1$$

$$(y-z)(x+z+y) = \frac{1}{2}.$$

По аналогии получаем систему:

$$\begin{cases} (y-z)(x+y+z) = \frac{1}{2} \\ (x-y)(x+y+z) = \frac{1}{2} \\ (x-z)(x+y+z) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow 2y = x+z, \text{ значит}$$

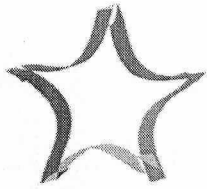
$$x+y+z = 2y+y = 3y = 3$$

$$y = 1, \text{ тогда из}$$

системы уравнений (1), (2), (3). Найдем x и z . Получим

$$x = \frac{4}{6}, z = \frac{5}{6}.$$

$$\text{Получим: } \frac{4}{6} : 1 : \frac{5}{6}$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 34-09-07

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

Задача n 2.

Идем до обеда 2 касира одесущими x покупателями, тогда x 1 касир до обеда одесущими $x - 0,25x = 0,75x$ покупателей.

Идем после обеда 2 касира одесущими y покупателями, тогда 1 касир после обеда одесущими $y + 0,2y = 1,2y$ покупателей.

$$\begin{aligned} \text{По условию } x + 0,75x + y + 1,2y &< 250 \\ 1,75x + 2,2y &< 250 \end{aligned}$$

а также

$$0,75x + 1,2y = 1,1(x + y)$$

$$0,75x + 1,2y = 1,1x + 1,1y$$

$$0,1y = 0,35x$$

$$y = 3,5x$$

Подставим в неравенство:

$$1,75x + 2,2 \cdot 3,5x < 250$$

$$9,45x < 250.$$

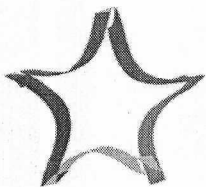
т.е. x — число касира (т.е. это число покупателей)

получаем, что $x = 20$ (потому что $x > 20$ и $x < 26$ из неравенства, получаем не целый результат). Тогда, т.е.

$x = 20$, а суммарное кол-во посетителей у 2 касира $= x + y = x + 3,5x = 4,5x$, то всего их одесущих

$$4,5 \cdot 20 = 90 \text{ человек.}$$

Ответ: 90 человек.



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 34-09-07

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

Задача 13.

Рассмотрим количество различных многоугольников, не включая точку A . Посчитаем их с помощью теоремы сочетаний без точки A .

$$C_3^{2023} + C_4^{2023} + C_5^{2023} + C_6^{2023} + \dots + C_{2021}^{2023} + C_{2022}^{2023} + C_{2023}^{2023}$$

Теперь рассмотрим количество многоугольников, включая точку A :

Нам известно, что точка A входит в одну из вершин многоугольников.

Возьмём в пример треугольник. Т.е. нам необходимо выбрать 2 точки (без точки A) которые нам послужат (вершинами).

Так же для четырёхугольника необходимо выбрать 3 отличные от A точки.

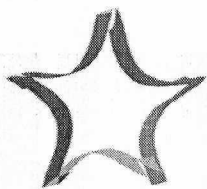
и так далее для любого n -угольника. То есть:

$$C_2^{2023} + C_3^{2023} + C_4^{2023} + \dots + C_{2021}^{2023} + C_{2022}^{2023} + C_{2023}^{2023}$$

Можно из этого сделать вывод, что количество многоугольников без точки A меньше, чем количество многоугольников, включающих в себя точку A . Иначе их разность составит $-C_2^{2023}$, что равно

$$= \frac{2023!}{2! \cdot (2023-2)!} = \frac{2023 \cdot 2022}{2} = 1011 \cdot 2023 = 2045263.$$

Ответ: на 2045263 больше многоугольников, содержащих точку A .



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 34-09-07

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы						10			

Вариант 1

Задача № 6.

Дано:

$$t_n = 0^\circ\text{C}$$

$$t_b = 0^\circ\text{C}$$

$$S = 16 \text{ см}^2$$

$$\rho_b = 1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$$

$$\rho_n = 0,9 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$$

Искать: m и h - ?

Решение:

m - постоянна, значит после
тавления льда масса бури равна
массе полученной воды.

Измени из графика, мы знаем,
что за 20 минут высота измени-
лась на $120 - 115 = 5$ см.

Теперь найдем изначальную высоту

льда:

$$m_n = S \cdot h_n \cdot \rho_n = S \cdot (h_n - 5) \cdot \rho_b$$

$$h_n \cdot \rho_n = \rho_b (h_n - 5)$$

$$0,9 h_n = h_n - 5$$

$$-0,1 h_n = -5$$

$$0,1 h_n = 5$$

$$h_n = 50 \text{ (см)} - \text{изначальная высота льда}$$

Теперь найдем высоту воды:

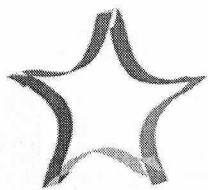
$$h_b = 120 - 50 = 70 \text{ (см)}. \text{ Из этих данных теперь можем}$$

найти m_b и m_n .

$$m_b = S \cdot h_b \cdot \rho_b = 70 \text{ см} \cdot 16 \text{ см}^2 \cdot 1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 1120 \text{ г}$$

$$m_n = S \cdot h_n \cdot \rho_n = 50 \text{ см} \cdot 16 \text{ см}^2 \cdot 0,9 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 720 \text{ г}$$

$$\text{Ответ: } m_n = 720 \text{ г}, m_b = 1120 \text{ г}$$



Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

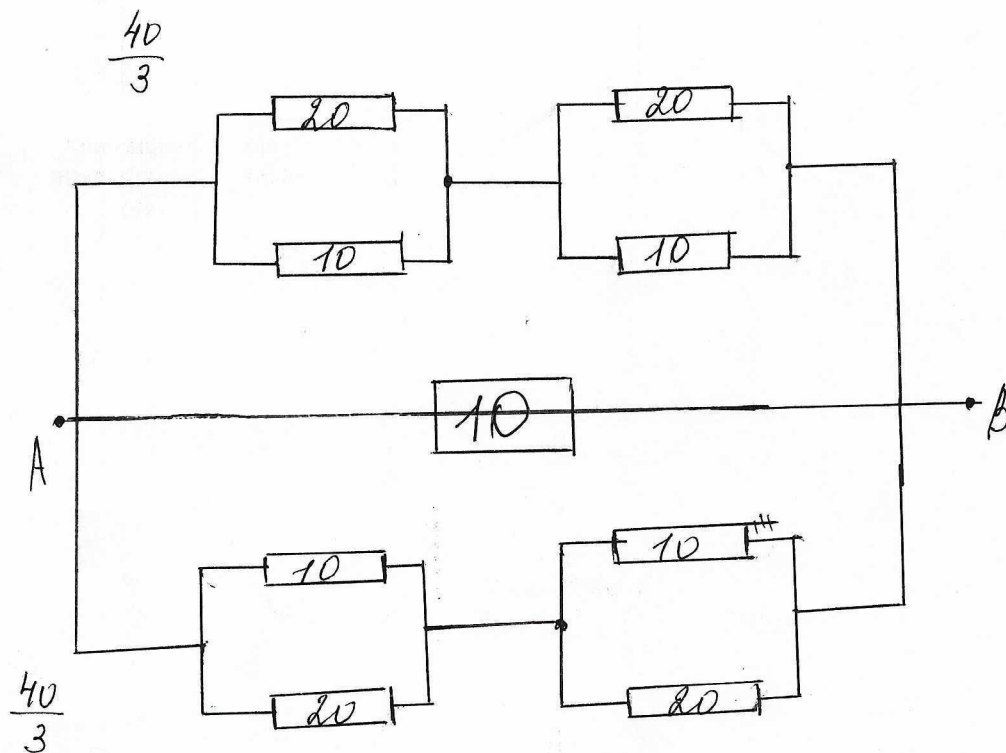
шифр 34-09-07

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Вариант 1

Задача n 7.

средствами раширо по условию решить задачу:

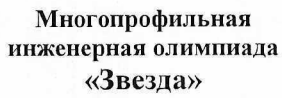


$$R_{\text{общ.1}} = \frac{20 \cdot 10}{20 + 10} = \frac{200}{30} = \frac{20}{3} \text{ Ом}$$

$$R_{\text{общ.2}} = \left(\frac{40}{3} \cdot \frac{40}{3} \right) : \frac{40}{3} = \frac{1600}{3} \cdot \frac{1}{40} = \frac{20}{3} \text{ Ом.}$$

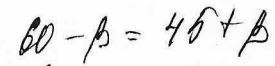
$$R_{\text{общ.всех}} = \left(\frac{20}{3} \cdot 10 \right) : \left(\frac{20}{3} + 10 \right) = 4 \text{ Ом.}$$

Ответ: 4 Ом



Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы									

Задача 18.



$$\beta = 4,5^{\circ}$$

Problem: $4,5^\circ$; $A(4,5; -0,5)$.