

Многопрофильная
инженерная олимпиада
«Звезда»

шифр 021103

Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	Всего
Баллы	0	9	0	10	15	10	10	15	69

Вариант 2

№3.

$$4^x + \sin^4 y + \ln^6 z = 25$$

$y_1 = 4^x$ — возрастающая функция

$y_2 = \sin^4 y$ — возрастающая функция

$y_3 = \ln^6 z$ — возрастающая функция

$y = 4^x + \sin^4 y + \ln^6 z$ —
тоже возрастающая
функция и имеет единственное
верное решение. *golg.*

Значит, $x=2$ (так как $4^3=64$, не подходит),

$$y = \frac{\pi}{2} \text{ (т.к. } \sin^4 \frac{\pi}{2} = 1)$$

$$4^2 + \sin^4 \frac{\pi}{2} + \ln^6 z = 25$$

$$16 + 1 + \ln^6 z = 25$$

$$\ln^6 z = 8$$

$$\ln^6 z = 2^3$$

$$\ln z = \sqrt[3]{2}$$

$$z = e^{\sqrt[3]{2}}$$

Соответственно:

$$x=2, y = \frac{\pi}{2}, z = e^{\sqrt[3]{2}}$$

$$2^x - 4 \sin^2 y + 8 \ln^3 z = 2^2 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{2} + 8 \ln^3 e^{\sqrt[3]{2}} = 4 - 4 + 2 \cdot 8 \sqrt[3]{2} = 16 \sqrt[3]{2}$$

$$16 \sqrt[3]{2} \leq 45 \text{ так как } \sqrt[3]{512} \leq \sqrt[3]{2025}$$

что и требовалось доказать.

№4.

$$a_1 = \cos 70^\circ$$

$$a_2 = \cos 100^\circ = \cos(90^\circ + 10^\circ) = -\sin 10^\circ$$

$$a_3 = \cos 1000^\circ = \cos(1080^\circ - 80^\circ) = \sin 10^\circ$$

$$a_4 = \cos 10000^\circ = \cos(9420^\circ + 280^\circ) = \sin 10^\circ$$

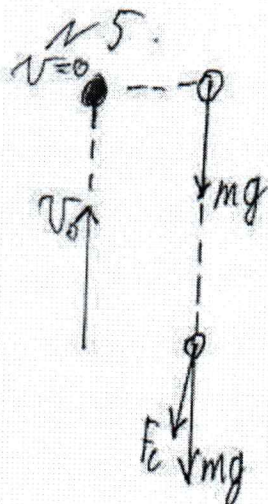
$$a_5 = \cos 100000^\circ = \dots = \sin 10^\circ$$

$$\begin{aligned} a_{2023} &= \sin 70^\circ \\ a_{2024} &= \sin 70^\circ \end{aligned} \quad \text{не возмано}$$

$$a_1 \cos x + (a_2 + a_{2023} + a_{2024}) \cdot \sin x = \cos 70^\circ \cdot \cos x + (-\sin 70^\circ + \sin 70^\circ + \sin 70^\circ) \cdot \sin x = \cos 70^\circ \cdot \cos x + \sin 70^\circ \cdot \sin x = \cos(70^\circ - x).$$

Значит, наибольшее значение равно 1.

Ответ: 1.



При движении тела в верх на него действуют силы mg (сила тяжести) и F_c (сила сопротивления воздуха).

$F_c = kv$, где k - коэффициент сопротивления.

Согласно графику, максимальная высота траектории полета тела, то есть

$v=0 \Rightarrow F_c=0 \Rightarrow a=g$. То есть a (ускорение) в момент времени 2 секунды ($t=2$) по графику, будет равно g (ускорению свободного падения).

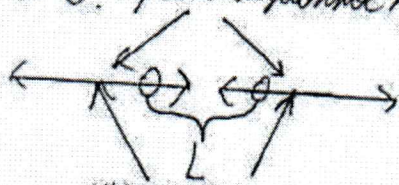
Для того, чтобы определить изменение скорости, посчитаем площадь под графиком.

Таким образом получаем, что установившаяся скорость тела равна $25 \frac{м}{с}$.

$v_{установившаяся} = 25 \text{ м/с}$.

Ответ: 25 м/с .

16. гравитационное притяжение



кулоновское отталкивание

2) потенциальную энергию электростатического взаимодействия: $W_p = k \frac{q_1 q_2}{L}$.

В начальный момент времени шарики имеют:

1) потенциальную энергию гравитационного взаимодействия: $E_p = G \frac{m_1 m_2}{L}$

2) потенциальную энергию электростатического взаимодействия: $W_p = k \frac{q_1 q_2}{L}$.





Многопрофильная
инженерная
олимпиада «Звезда»

Бланк ответов №2

шифр

021103

Из-за того, что шарик одноимённые, они будут отталкиваться друг от друга. При сближении их потенциальная энергия будет стремиться к нулю, а остатки потенциальной энергии перейдут в кинетическую.

$$W_p \rightarrow E_p \left(2 \cdot k \frac{q_1 q_2}{L} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right)$$

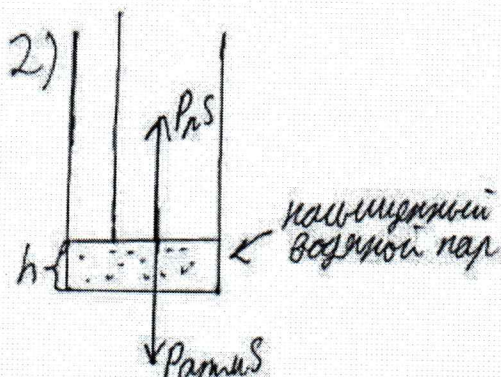
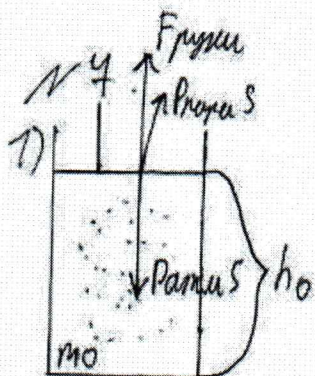
Из закона сохранения импульса: $m_1 v_1 = m_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_1}$, а $v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2}$. v_1 - скорость первого шарика, а v_2 - скорость второго шарика.

$$\begin{aligned} 2k \frac{q_1 q_2}{L} &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 \left(\frac{m_1 v_1}{m_2} \right)^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_1^2 v_1^2}{2m_2} = \\ &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_1^2 v_1^2}{m_2} = v_1^2 \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_1^2}{m_2} \right) \end{aligned}$$

Выразим $v_1 = \sqrt{\frac{4kq_1q_2}{L \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} \right)}}$, значит:

$$v_2 = \sqrt{\frac{4kq_1q_2}{L \left(m_2 + \frac{m_2^2}{m_1} \right)}}$$

Ответ: $v_1 = \sqrt{\frac{4kq_1q_2}{L \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} \right)}}$, $v_2 = \sqrt{\frac{4kq_1q_2}{L \left(m_2 + \frac{m_2^2}{m_1} \right)}}$.



$$\begin{aligned} N &= 0,028 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2} \\ h &= 0,15 \text{ м} \\ h_0 &= 0,05 \text{ м}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu &= 18 \\ P_{атм} &= 10^5 \end{aligned}$$

При температуре $T = 100^\circ \text{C}$ атмосферное давление будет равно давлению пара. В связи с тем,

что поршень опустился, пар в начале на рисунке 1 не был каушиженным.

Во втором случае на рисунке 2 поршень оказался в равновесии, значит $P_{атм} S = P_{пара} S \Rightarrow \Rightarrow$ давление пара во 2 случае равно атмосферному давлению.

Значит пар в первом случае в начале равен $P_{атм}$.

Из уравнения идеального газа:

$$P_0 V_0 = \frac{m_0}{\mu} R T \Rightarrow m_0 = \frac{P_0 V_0 \mu}{R T}$$

Так как объём пара V стал в 4 раза меньше ($\frac{60}{15} = 4$), а давление увеличилось в 2 раза, то половина массы газа сконденсировалась.

$$m_2 = \frac{P_2 V_2 \mu_2}{R T} = \frac{P_{атм} \cdot 0,15 \cdot 0,05 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{R T} = \frac{10^5 \cdot 0,75 \cdot 0,05 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 373} =$$

$$= \frac{10^2 \cdot 0,0045 \cdot 18}{3099,63} = \frac{73,5}{3099,63} = 0,00436 \text{ кг} - \text{в конце масса пара.}$$

если $x = 100\%$
 $0,00436 = 50\%$ } $\Rightarrow x = \frac{0,00436}{0,5} = 0,00872 \text{ кг} = 8,72 \text{ грам}$
 ма в начале.

Ответ: 8,72 грамма.

№ 2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\log_{25} x \cdot \log_3 y}{\log_{24} xy} = 1 \quad (1) \\ \frac{\log_5 y \cdot \log_{49} z}{\log_4 yz} = \frac{3}{5} \quad (2) \\ \frac{\log_{125} z \cdot \log_5 x}{\log_{81} zx} = 1 \quad (3) \end{array} \right.$$

$$(1): \frac{\frac{1}{2} \log_5 x \cdot \log_3 y}{\frac{1}{3} \log_3 xy} = 1$$

$$\frac{3}{2} \log_5 x \cdot \log xy^y = 1$$

$$(2): \frac{\log_5 y \cdot \frac{1}{2} \log_4 z}{\log_4 yz} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{2} \log_5 y \cdot \log yz^z = \frac{3}{5}$$



Многопрофильная
инженерная
олимпиада «Звезда»

Бланк ответов №2

шифр 021103

$$(3): \frac{\frac{1}{3} \log_5 z \cdot \log_3 x}{\frac{1}{4} \log_3 z x} = 1$$

ооо?

$$\frac{4}{3} \log_5 z \cdot \log_3 x = 1$$

$$\begin{cases} \log_5 x \cdot \log_{xy} y = \frac{2}{3} \\ \log_5 y \cdot \log_{yz} z = \frac{6}{5} \\ \log_5 z \cdot \log_{zx} x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Пусть } \log_5 x = p \Rightarrow x = 5^p \\ \text{Пусть } \log_5 y = m \Rightarrow y = 5^m \\ \text{Пусть } \log_5 z = n \Rightarrow z = 5^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{получаем: } \begin{cases} p \cdot \log_5 p m 5^m = \frac{2}{3} \\ m \cdot \log_5 m n 5^n = \frac{6}{5} \\ n \cdot \log_5 n p 5^p = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{pm}{p+m} = \frac{2}{3} \\ \frac{mn}{m+n} = \frac{6}{5} \\ \frac{np}{n+p} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3pm = 2p + 2m \\ 5mn = 6m + 6n \\ 4np = 3n + 3p \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3pm - 2m = 2p \\ 5mn - 6m = 6n \\ 4np - 3n = 3p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m(3p-2) = 2p \\ m(5n-6) = 6n \\ p(4n-3) = 3n \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = \frac{2p}{3p-2} \\ m = \frac{6n}{5n-6} \\ p = \frac{3n}{4n-3} \end{cases}$$

$$\frac{2p}{3p-2} = \frac{6n}{5n-6}$$

$$10p - 12p = 18n - 12n$$

$$p(10n-12-18n) = -12n$$

$$p(-8n-12) = -12n$$

$$p = \frac{12n}{8n+12} = \frac{3n}{2n+3}$$

$$\frac{3n}{2n+3} = \frac{3n}{4n-3}$$

$$12n^2 - 9n = 6n^2 + 9n$$

$$6n^2 = 18n$$

$$n(n-3) = 0$$

$$n=0 \text{ или } n=3$$

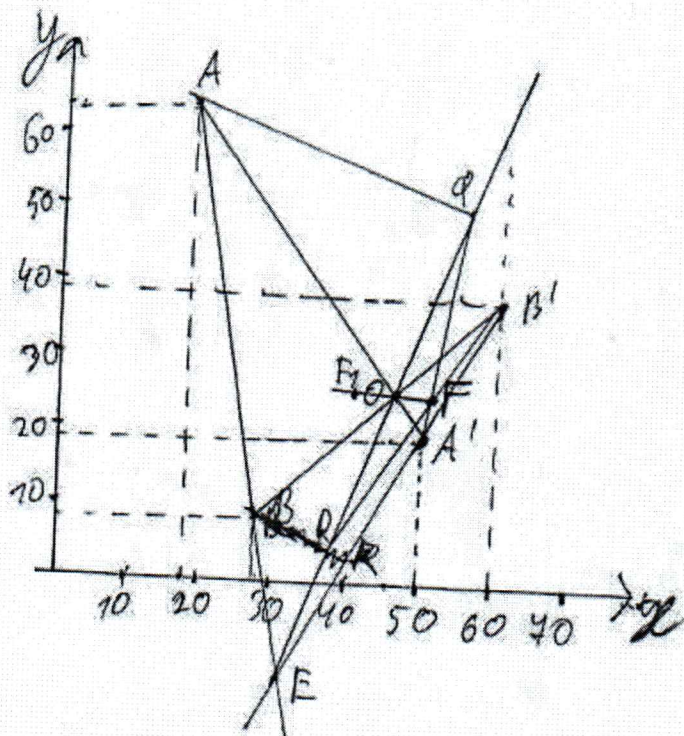
$$p = \frac{3n}{4n-3} \neq \quad p = \frac{3n}{4n-3} = \frac{3}{4-3} = 3$$

$$m = \frac{6n}{5n-6} = \frac{6 \cdot 3}{5 \cdot 3 - 6} = \frac{18}{9} = 2$$

арифм. ошибка -30.

$$\begin{cases} \log_5 x = 3 \\ \log_5 y = 2 \\ \log_5 z = 1 \end{cases} \begin{cases} x = 5^3 \\ y = 5^2 \\ z = 5^1 \end{cases} \begin{cases} x = 125 \\ y = 25 \\ z = 5 \end{cases}$$

Ответ: $x = 125, y = 25, z = 5$.
✓ 8.



В связи с тем, что изображение перевернутое, линза собирающая. Так как изображение предмета больше самого предмета, значит предмет расположен за двойным фокусным расстоянием.

Соединим с помощью линейки точки A и A', линии AA' и BB' будут являться оптическими осями. Обозначим ее буквой O. Построим лучи на продолжении отрезков AA' и BB' к оси x. Точкой пересечения лучей будет точка E.

Проведем прямую от точки E к точке O и продолжим ее. На этой линии будет располагаться линза.



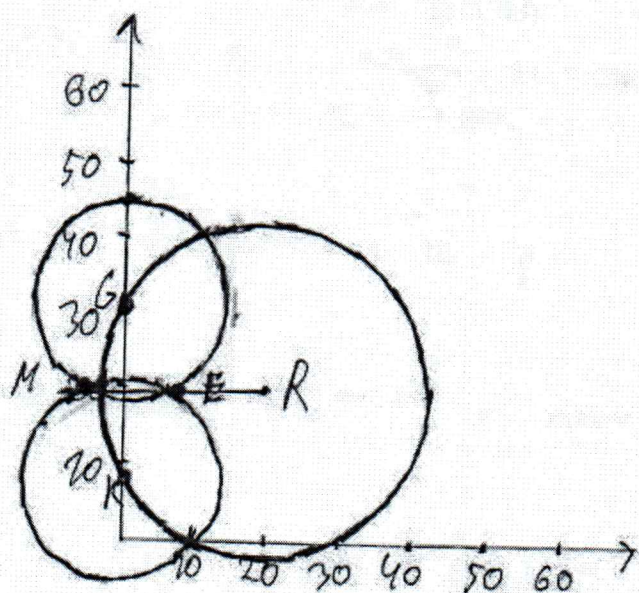


Многопрофильная
инженерная
олимпиада «Звезда»

Бланк ответов №2

шифр 021103

Составим метод 1, позволяющий построить отрезок от заданной точки к прямой или оси, в произвольной декартовой системе координат. Отметим произвольную точку R с координатами 20 по оси x и 20 по оси y . Пусть R — центр окружности 1. Проведем окружность 1 с центром в точке R таким образом, чтобы она пересекала ось x и ось y в двух точках. Пусть окружность 1 пересекает ось y в точках B и K . Проведем окружности 2 и 3, приняв



B и K как центры соответствующих окружностей. Радиусы 2 и 3 окружностей делаем равными их точки пересечения, т.е. окружности 2 и 3 пересекаются в двух точках. Пусть точки пересечения окружностей 2 и 3 будут E и M . Проведем прямую к точке R , проходящую через точки M и E . Точка пересечения этой прямой с осью y является расстоянием от R к оси y . Аналогично других точек, прямых, осей. Используя метод 1 проведем прямую от точки A перпендикулярную лучу EO к этому лучу. Проведем отрезки QA' и RB' . Их точка пересечения есть отрезок F . —————→

значительно проведем прямую от точки B. Точкой пересечения будет Q.

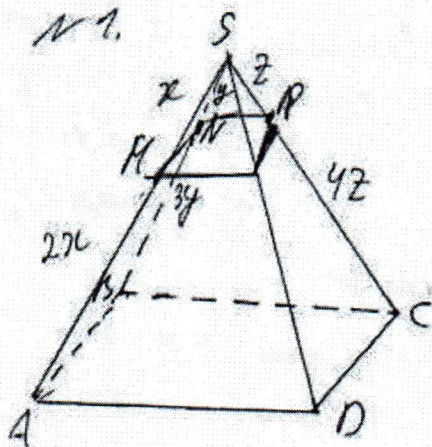
Проведем отрезки QA' и RB'. Их точка пересечения есть фокус F.

Соединим O и F и получим отрезок, равный фокусному расстоянию. С помощью линейки отложим аналогичный отрезок в противоположных направлениях от фокуса F и получим второй фокус F₁.

С помощью метода 1 определим координаты ~~отличия~~ эллиптического центра и фокусов. Таким образом эллиптический центр O имеет координаты по {x; y} следующие: {46; 24}, фокусы F {52; 26,5} и F₁ {~~40,5~~ 41; 24,5}.
F₁ {41; 24,5}.

Ответ: эллиптический центр {46; 24}, фокусы {52; 26,5} и {41; 24,5}.

н 1.



Решим задачу с помощью теоремы Менелая.

